FUNCIONES

CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones:

1) $f(x)=x^2+5$

La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

$D_f=(-\infty,\infty)$

Despejando x para obtener el rango:

$$y=x^2+5 \quad \Rightarrow \quad y-5=x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y-5}=x$$

Resolviendo la desigualdad: $y-5\geq 0 \quad \Rightarrow \quad y\geq 5$

$\therefore \quad R_f=[0,\infty)$

2) $f(x)=|x|$

La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

$D_f=(-\infty,\infty)$

Por definición de valor absoluto, el valor más pequeño que puede tener y es cero:

$\therefore \quad R_f=[0,\infty)$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$

La función está definida para todo valor de x, exceptuando $x=-3$ y $x=3$, ya que la división por cero no existe:

$D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

Despejando x para obtener el rango:

$$y=\frac{1}{x^2-9} \quad \Rightarrow \quad (x^2-9)y=1 \quad \Rightarrow \quad x^2-9=\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{y}+9 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{1}{y}+9}$$

Resolviendo la desigualdad: $\dfrac{1}{y}+9\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{y}\geq -9$

Si $y>0$: $y\geq -\dfrac{1}{9}$, entonces su intersección es: $y>0$.

Si $y<0$: $y\leq -\dfrac{1}{9}$, entonces su intersección es: $y\leq -\dfrac{1}{9}$.

$\therefore \quad R_f=\left(-\infty,-\dfrac{1}{9}\right]\cup[0,\infty)$

4) $f(x)=\sqrt{5x-20}$

El radicando no puede ser negativo, así que: $5x-20\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5x\geq 20 \quad \Rightarrow \quad x\geq \dfrac{20}{5} \quad \Rightarrow \quad x\geq 4$

$D_f=[4,\infty)$

Para obtener el rango, se observa que el valor mínimo que se puede obtener de una raíz cuadrada es cero, así que: $y\geq 0$.

$\therefore \quad R_f=[0,\infty)$

5) $f(x)=2\,sen\,x$

La función seno está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

$D_f=(-\infty,\infty)$

El rango de la función seno está definida está definida para $-1\leq x\leq 1$, pero como tiene una amplitud de dos, este rango se duplica:

$\therefore \quad R_f=[-2,2]$

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

- La *suma de funciones* se define como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

$f(x)=x^2;\ \ g(x)=-2x+5$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-2x+5$

$D_f=(-\infty,\infty)$

$D_g=(-\infty,\infty)$

$D_{f(x)+g(x)}=D_f \cap D_g=(-\infty,\infty)$

- La *resta de funciones* se define como $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

$f(x)=\sqrt{x};\ \ g(x)=\sqrt{9-x^2}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{9-x^2}$

$D_f=[0,\infty)$

$D_g=[-3,3]$

$D_{f(x)-g(x)}=D_f \cap D_g=[0,3]$

- El *producto de funciones* se define como $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

$f(x)=3x;\ \ g(x)=\dfrac{1}{12-2x}$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{3x}{12-2x}$

$D_f=(-\infty,\infty)$

$D_g=(-\infty,6)\cup(6,\infty)$

$D_{f(x)g(x)}=D_f \cap D_g=(-\infty,6)\cup(6,\infty)$

- El *cociente de funciones* se define como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio es $D_f \cap D_g$, siempre que $g(x)\neq 0$.

$f(x)=\dfrac{11}{2-x};\ \ g(x)=9x$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{11}{(2-x)}}{9x}=\frac{11}{18x-9x^2}$$

$D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

$D_g=(-\infty,\infty)$

$D_{\frac{f(x)}{g(x)}}=D_f \cap D_g=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$

- La *composición de funciones* se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y su dominio es el conjunto de todos los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. Esto significa que: $D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

Dadas las siguientes funciones, obtener la composición $f \circ g$ y determinar su dominio.

1) $f(x) = \sqrt{x-8}$; $g(x) = x-2$

$D_f = [8, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{(x-2)-8} = \sqrt{x-10}$

en esta función el dominio es: $D_f = [10, \infty)$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$D_{f \circ g} = \{(-\infty, \infty) \cap [10, \infty)\} = [10, \infty)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-25}$; $g(x) = x^2$

$D_f = (-\infty, 25) \cup (25, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \dfrac{1}{(x^2)-25} = \dfrac{1}{x^2-25}$

en esta función el dominio es: $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$D_{f \circ g} = \{(-\infty, \infty) \cap (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)\} = (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$

Es importante señalar que $f \circ g \neq g \circ f$. En el primer caso, primero se aplica la función g y después f. En el segundo caso, primero se aplica la función f y después g.

Dadas $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{4+x}$, obtener $f \circ g$ y $g \circ f$.

a) $D_f = (-\infty, 1]$

$D_g = [-4, \infty)$

Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{4+x}) = \sqrt{1-\sqrt{4+x}}$

en esta función el dominio es: $[-4, -3]$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$D_{f \circ g} = \{[-4, \infty) \cap [-4, -3]\} = [-4, -3]$

b) $D_f = (-\infty, 1]$

$D_g = [-4, \infty)$

Para obtener la composición $g \circ f$ se sustituye x por $f(x)$ en g:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(\sqrt{1-x}) = \sqrt{4+\sqrt{1-x}}$

en esta función el dominio es: $(-\infty, 1]$

$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$

$D_{g \circ f} = \{(-\infty, 1] \cap (-\infty, 1]\} = (-\infty, 1]$

$\therefore \quad f \circ g \neq g \circ f$

Obtener $f \circ g$, $D_{f\circ g}$, $g \circ f$, y $D_{g\circ f}$ si:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

$D_f=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

$D_g=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}-1}=\frac{1}{\frac{x-1-x-1}{x+1}}=\frac{x+1}{-2}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty,\infty)$

pero como $D_{f\circ g}=\{\,x\in D_g \mid g(x)\in D_f\,\}$, entonces:

$D_{f\circ g}=\{\,(-\infty,\infty)\cap[(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)]\,\}=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

$$(g\circ f)(x)=\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\frac{1}{x-1}+1}=\frac{\frac{1-x+1}{x-1}}{\frac{1+x-1}{x-1}}=\frac{2-x}{x}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

pero como $D_{g\circ f}=\{\,x\in D_f \mid f(x)\in D_g\,\}$, entonces:

$D_{g\circ f}=\{\,[(-\infty,0)\cup(0,\infty)]\cap[(-\infty,1)\cup(1,\infty)]\,\}=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$

$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$

$D_g=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{1}{x-3}+2}=\frac{1}{\frac{1+2x-6}{x-3}}=\frac{x-3}{2x-5}$$

para esta expresión el dominio es: $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$

pero como $D_{f\circ g}=\{\,x\in D_g \mid g(x)\in D_f\,\}$, entonces:

$$D_{f\circ g}=\left\{\,[(-\infty,3)\cup(3,\infty)]\cap\left[\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)\right]\right\}=\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},3\right)\cup(3,\infty)$$

$$(g\circ f)(x)=\frac{1}{\frac{1}{x+2}-3}=\frac{1}{\frac{1-3x-6}{x+2}}=\frac{x+2}{-3x-5}$$

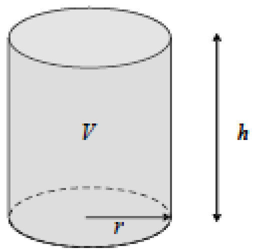
para esta expresión el dominio es: $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},\infty\right)$

pero como $D_{g\circ f}=\{\,x\in D_f \mid f(x)\in D_g\,\}$, entonces:

$$D_{g\circ f}=\left\{\,[(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)]\cap\left[\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},\infty\right)\right]\right\}=(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},\infty\right)$$

MODELADO DE FUNCIONES

1) Expresar el volumen V de un cilindro como función del radio r si su altura es del doble de su radio.

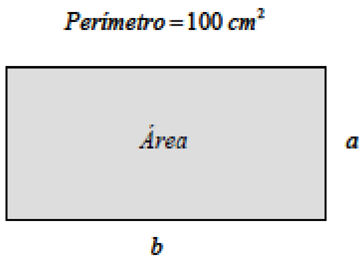


El volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h \quad \_(1)$

La altura es el doble del radio, así que: $h^2 = 2r \quad \_(2)$

Sustituyendo en (1) se obtiene la expresión pedida: $V(r) = \pi r^2 (2r) = 2\pi r^3$

2) Expresar el área A de un rectángulo como función de la base b, si se sabe que su perímetro es de $100\ cm$.



El perímetro de un rectángulo está dado por: $P = 2a + 2b \quad \_(1)$

Sustituyendo $P = 100$ en (1):

$2a + 2b = 100$

Como se quiere expresar en términos de b,
se despeja la altura a:

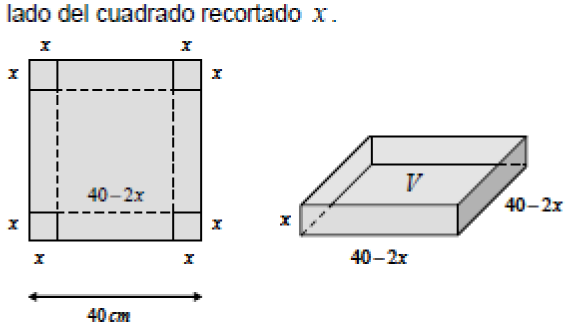
$$2a + 2b = 100 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{100 - 2b}{2} = 50 - b \quad \_(2)$$

El área de un rectángulo es: $A = ab \quad \_(3)$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene: $A = (50 - b)b$

Por lo que la expresión buscada es: $A(b) = 50 - b^2$

3) Se dispone de una cartulina cuadrada $40\ cm$ de lado y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. Expresar el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado x.



La longitud de cada lado de la caja es: $40 - 2x$

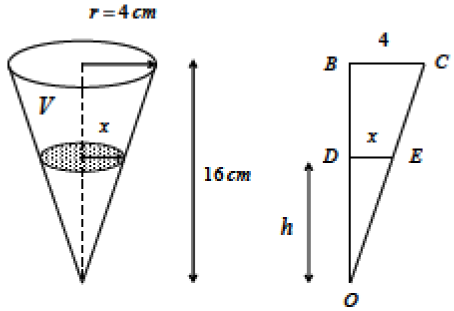
El volumen de la caja es: $V = A \cdot x$

$A = (40 - 2x)^2 x = (1600 - 160x + 4x^2)x$

Por lo que la expresión buscada es: $A(x) = 4x^3 - 160x^2 - 1600x$

4) Expresar el volumen V de agua como función de la altura h en un instante cualquiera de un cono circular recto invertido de $4\ cm$ de radio y de $16\ cm$ de altura.

El volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \_(1)$



Por la semejanza de los triángulos ODE y OBC se tiene: $\frac{16}{4}=\frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h=4x \quad \_(2)$

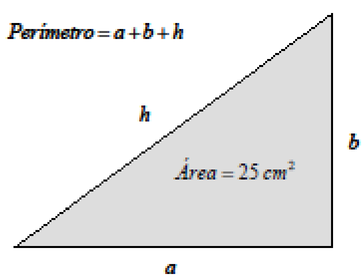
Despejando x de (2): $x=\frac{h}{4}$

El volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi x^2 h \quad \_(3)$

Sustituyendo r por el valor de x en (1) se obtiene: $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h=\frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{16}h$

Por lo que la expresión pedida es: $V(h)=\frac{1}{48}\pi h^3$

5) Expresar la hipotenusa h de un triángulo con área de $25\ cm^2$ como función de su perímetro P.



El Teorema de Pitágoras establece que: $h^2=a^2+b^2 \quad \_(1)$

El área de un triángulo está dada por: $A=\frac{ab}{2} \quad \_(2)$

El perímetro P del triángulo está dado por: $P=a+b+h \quad \_(3)$

Se sabe que: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2-2ab=a^2+b^2$

Comparando con (1) se tiene: $h^2=(a+b)^2-2ab \quad \_(4)$

De (2): $\frac{ab}{2}=25 \quad \Rightarrow \quad ab=50 \quad \Rightarrow \quad 2ab=100$

Sustituyendo en (4): $h^2=(a+b)^2-100 \quad \_(5)$

De (3): $P-h=a+b \quad \Rightarrow \quad (P-h)^2=(a+b)^2 \quad -(6)$

Sustituyendo en (5): $h^2=(P-h)^2-100$

$\Rightarrow \quad h^2=P^2-2Ph+h^2-100 \quad \Rightarrow \quad 0=P^2-2Ph-100$

$\Rightarrow \quad 2Ph=P^2-100$

despejando h se obtiene la expresión pedida: $h(P)=\frac{P^2-100}{2P}$

FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA EXPLÍCITA E IMPLÍCITA

Transformar las siguientes funciones expresadas en forma implícita a explícita:

1) $9xy-2x-3y-16=0$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$9xy-3y=2x+16$

factorizando y:

$y(9x-3)=2x+16$

despejando y:

$$y=\frac{2x+16}{9x-3}$$

2) $4x^2y-7x^3-2xy+17x+6y+15=0$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$4x^2y-2xy+6y=7x^3-17x-15$

factorizando y:

$y(4x^2-2x+6)=7x^3-17x-15$

despejando y:

$$y=\frac{7x^3-17x-15}{4x^2-2x+6}$$

3) $5y^2+8x-10x^3y^2-13=0$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$5y^2-10x^3y^2=-8x+13$

factorizando y:

$y^2(5-10x^3)=-8x+13$

se despeja y^2:

$$y^2=\frac{-8x+13}{5-10x^3}$$

extrayendo la raíz cuadrada positiva se obtiene y:

$$y=\sqrt{\frac{-8x+13}{5-10x^3}}$$

4) $\dfrac{5y-6x}{4y-1}+12x^2=0$

multiplicando por el denominador:

$5y-6x+12x^2(4y-1)=0(4y-1)$

eliminando los paréntesis:

$5y-6x+48x^2y-12x^2=0$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$5y+48x^2y=12x^2+6x$

factorizando y:

$y(5+48x^2)=12x^2+6x$

despejando y:

$$y=\frac{12x^2+6x}{5+48x^2}$$

5) $\frac{3x}{y}+2y-4=0$

multiplicando por y:

$3x+2y^2-4y=0$

ordenando con respecto a y:

$2y^2-4y+3x=0$

esto representa una ecuación de segundo grado donde:

$a=2, \quad b=-4, \quad c=3x$

aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y tomando la raíz positiva:

$$y=\frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(2)(3x)}}{2(2)}=\frac{4+\sqrt{16-24x}}{4}$$

reduciendo:

$$y=1+\sqrt{\frac{16-24x}{16}}$$

finalmente:

$$y=1+\sqrt{1-1.5x}$$

6) $9x-\frac{4+7\cos y^3}{5}=0$

rescribiendo la igualdad:

$$\frac{4+7\cos y^3}{5}=9x$$

multiplicando por 5:

$4+7\cos y^3=45x$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$7\cos y^3=45x-4$

$$\cos y^3=\frac{45x-4}{7}$$

aplicando la función inversa del coseno:

$$\cos^{-1}(\cos y^3)=\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)$$

$$y^3=\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)$$

extrayendo la raíz cúbica se obtiene y:

$$y=\sqrt[3]{\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)}$$

7) $2\ln xy - 4x^2 + 12 = 0$
ordenando:
$$2\ln xy = 4x^2 - 12$$
$$\ln xy = \frac{4x^2 - 12}{2} = 2x^2 - 6$$
aplicando la propiedad del producto de logaritmos:
$$\ln x + \ln y = 2x^2 - 6$$
dejando los términos con y en el primer miembro:
$$\ln y = 2x^2 - 6 - \ln x$$
aplicando la función exponencial:
$$e^{\ln y} = e^{\left(2x^2 - 6 - \ln x\right)} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\left(2x^2 - 6 - \ln x\right)}$$

FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Transformar las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica en forma explícita:

1) $\left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = t^2 \end{array}\right\}$

despejando t de la primera ecuación:
$$t = \frac{x}{3} \qquad \_\left[A\right]$$
despejando t de la segunda ecuación:
$$t = \sqrt{y} \qquad \_\left[B\right]$$
igualando las ecuaciones $\left[A\right]$ y $\left[B\right]$:
$$\frac{x}{3} = \sqrt{y}$$
elevando al cuadrado:
$$y = \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{9}$$
Nótese como se obtiene el mismo resultado si se sustituye $\left[A\right]$ en la segunda ecuación.

2) $\left.\begin{array}{l} x = t^2 + 2t \\ y = t - 2 \end{array}\right\}$

de la primera ecuación, se suma y resta uno para completar el trinomio cuadrado perfecto:
$$x = t^2 + 2t + 1 - 1 = (t+1)^2 - 1 \qquad \_\left[A\right]$$
despejando t:
$$t = \sqrt{x+1} - 1$$
despejando t de la segunda ecuación:
$$t = y + 2 \qquad \_\left[B\right]$$
igualando las ecuaciones $\left[A\right]$ y $\left[B\right]$:
$$\sqrt{x+1} - 1 = y + 2$$
$$y = \sqrt{x+1} - 3$$

3) $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{t} \\ y=\sqrt{t-6} \end{array}\right\}$

despejando t de la primera ecuación:

$t=\dfrac{1}{x}$ _ $[A]$

despejando t de la segunda ecuación:

$t=y^2+6$ _ $[B]$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{1}{x}=y^2+6$$

extrayendo la raíz cuadrada positiva:

$$y=\sqrt{\frac{1}{x}-6}$$

4) $\left.\begin{array}{l} x=2t+4 \\ y=8t-3 \end{array}\right\}$

despejando t de la primera ecuación:

$t=\dfrac{x-4}{2}$ _ $[A]$

despejando t de la segunda ecuación:

$t=\dfrac{y+3}{8}$ _ $[B]$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{8}$$

eliminando los denominadores:

$$8(x-4)=2(y+3)$$
$$8x-32=2y+6$$
$$y=\frac{8x-38}{2}=4x-19$$

5) $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2-5t} \\ y=(4t+7)^2 \end{array}\right\}$

despejando t de la primera ecuación:

$2-5t=\dfrac{1}{x}$

$t=\dfrac{\frac{1}{x}-2}{-5} \quad \_[A]$

despejando t de la segunda ecuación:

$t=\dfrac{\sqrt{y}-7}{4} \quad \_[B]$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$\dfrac{\frac{1}{x}-2}{-5}=\dfrac{\sqrt{y}-7}{4}$

multiplicando ambos miembros por -20:

$4\left(\dfrac{1}{x}-2\right)=-5\left(\sqrt{y}-7\right)$

$\dfrac{4}{x}-8=-5\sqrt{y}+35$

$y=\left(\dfrac{\frac{4}{x}-43}{-5}\right)^2=\left(\dfrac{43x-4}{5x}\right)^2$

6) $\left.\begin{array}{l} x=(7t-2)^3 \\ y=t^2-6t+11 \end{array}\right\}$

despejando t de la primera ecuación:

$t=\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{7} \quad \_[A]$

en la segunda ecuación, se resta y se suma dos para completar el trinomio cuadrado perfecto:

$y=t^2-6t+11-2+2=t^2-6t+9+2=(t-3)^2+2$

despejando t:

$t=\sqrt{y-2}+3 \quad \_[B]$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{7}=\sqrt{y-2}+3$

$\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{7}-3=\sqrt{y-2}$

$y=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-19}{7}\right)^2+2$

FUNCIÓN INVERSA

Si $f(1)=4$, $f(3)=8$ y $f(5)=-11$, encontrar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$ y $f^{-1}(-11)$

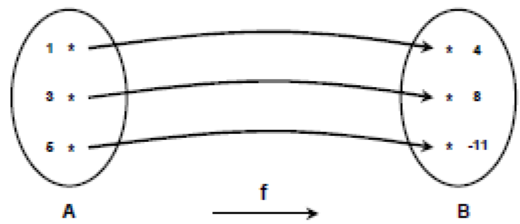
A partir de la definición de función inversa, se tiene que:

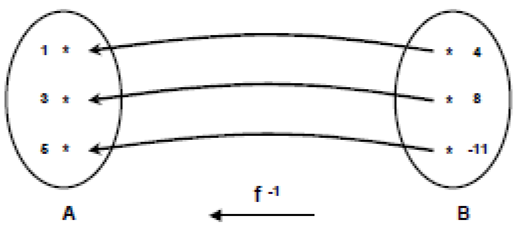
$f^{-1}(4)=1$ porque $f(1)=4$

$f^{-1}(8)=3$ porque $f(3)=8$

$f^{-1}(-11)=5$ porque $f(5)=-11$

El siguiente diagrama muestra las correspondencias:





Encontrar la función inversa de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\frac{x+4}{10}$ $y=\frac{x+4}{10}$ $x=\frac{y+4}{10}$ $10x=y+4$ $y=10x-4$ $f^{-1}(x)=10x-4$	2) $f(x)=x^3-5$ $y=x^3-5$ $x=y^3-5$ $x+5=y^3$ $y=\sqrt[3]{x+5}$ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+5}$	3) $f(x)=\sqrt{2x+9}$ $y=\sqrt{2x+9}$ $x=\sqrt{2y+9}$ $x^2=2y+9$ $y=\frac{x^2-9}{2}$ $f^{-1}(x)=\frac{x^2-9}{2}$

4) $f(x)=\frac{8}{3-x}$ $y=\frac{8}{3-x}$ $x=\frac{8}{3-y}$ $(3-y)x=8$ $3x-xy=8$ $3x-8=xy$ $y=\frac{3x-8}{x}$ $f^{-1}(x)=\frac{3x-8}{x}$	5) $f(x)=(6\sqrt{x}-7)^5$ $y=(6\sqrt{x}-7)^5$ $x=(6\sqrt{y}-7)^5$ $\sqrt[5]{x}=6\sqrt{y}-7$ $\sqrt[5]{x}+7=6\sqrt{y}$ $\sqrt{y}=\frac{\sqrt[5]{x}+7}{6}$ $y=\left(\frac{\sqrt[5]{x}+7}{6}\right)^2$ $f^{-1}(x)=\left(\frac{\sqrt[5]{x}+7}{6}\right)^2$	6) $f(x)=2x^2-20x+48$ Solución: $y=2x^2-20x+48$ $x=2y^2-20y+48$ se suma y se resta 2 para completar el trinomio cuadrado perfecto: $x=2y^2-20y+48+2-2$ $x=2y^2-20y+50-2$ se factoriza 2: $x=2(y^2-10y+25)-2$ se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $x=2(y+5)^2-2$ $x+2=2(y+5)^2$ $(y+5)^2=\frac{x+2}{2}$ $y+5=\sqrt{\frac{x+2}{2}}$ $y=\sqrt{\frac{x+2}{2}}-5$ $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+2}{2}}-5$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Graficar las siguientes funciones estableciendo su dominio.

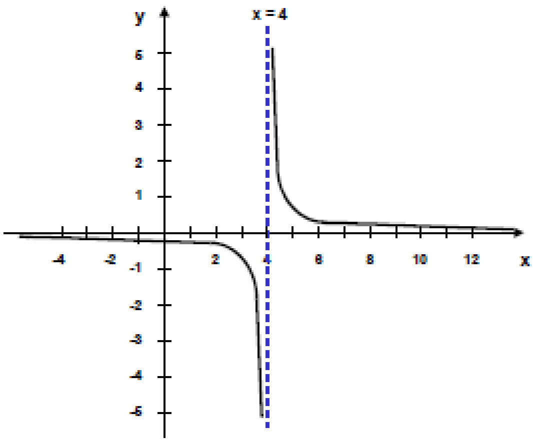
1) $y = \dfrac{1}{2x-8}$

Si el símbolo $\exists$ significa *existe* y el símbolo $\forall$ significa *para toda*, entonces: $\exists\, y\ \forall x$ excepto en $x = 4$

$D_f = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3.8	3.9
y	-0.071	-0.083	-0.100	-0.125	-0.167	-0.250	-0.500	-2.5	-5

x	4	4.1	4.2	5	6	7	8	9	10
y	no definido	5	2.5	0.500	0.250	0.167	0.125	0.100	0.083



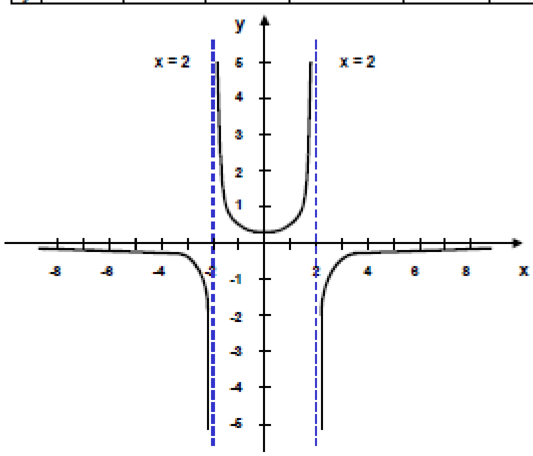
2) $y = \dfrac{1}{4-x^2}$

$\exists\, y\ \forall x$ excepto en $x = 2$ y $x = -2$

$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

x	-5	-4	-3	-2.1	-2	-1.9	-1
y	-0.047	-0.083	-0.200	-2.439	no definido	2.564	0.333

x	0	1	1.9	2	2.1	3	4	5
y	0.250	0.333	2.564	no definido	-2.439	-0.200	-0.083	-0.047



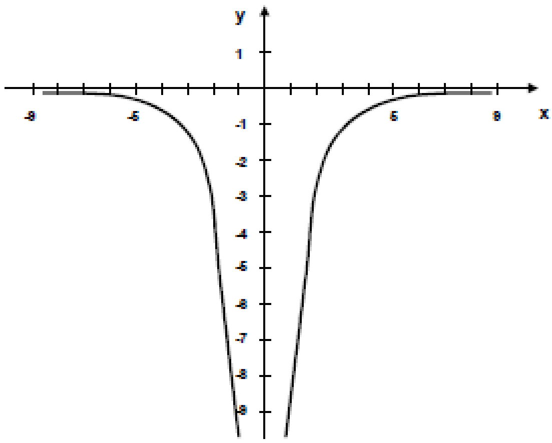
3) $y = -\dfrac{9}{x^2}$

$\exists\, y\ \forall x$ excepto en $x = 0$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	-0.140	-0.183	-0.250	-0.360	-0.562	-1	-2.250	-9	no definido

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-9	-2.250	-1	-0.562	-0.360	-0.250	-0.183	-0.140

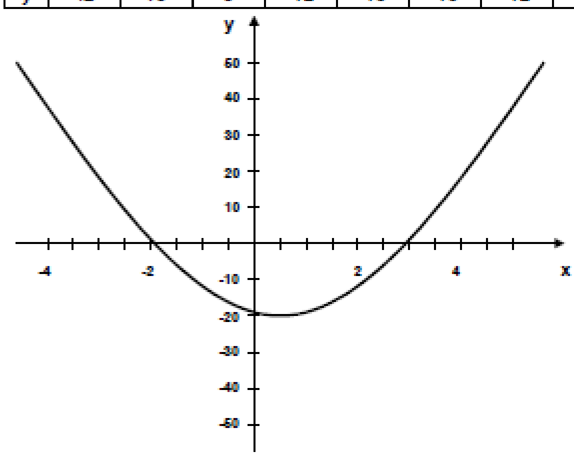


4) $y = 3x^2 - 3x - 18$

$\exists\, y\ \forall x$

$D_f = (-\infty, \infty)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	42	18	0	-12	-18	-18	-12	0	18	42



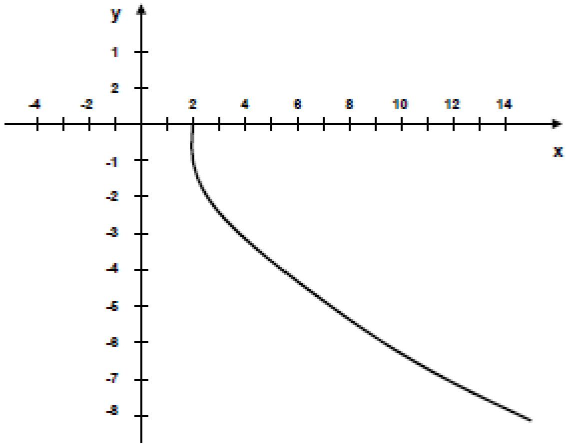
5) $y = -\sqrt{5x-10}$

Resolviendo la desigualdad: $5x - 10 \geq 0$, se tiene que:

$\exists\, y\ \forall x$ con $x \geq 2$

$D_f = [2, \infty)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	no definido	0	-2.236	-3.162	-3.872	-4.472	-5	-5.477	-5.916	-6.324	-6.708	-7.071	-7.416



6) $y = \sqrt{\dfrac{36-4x^2}{9}}$

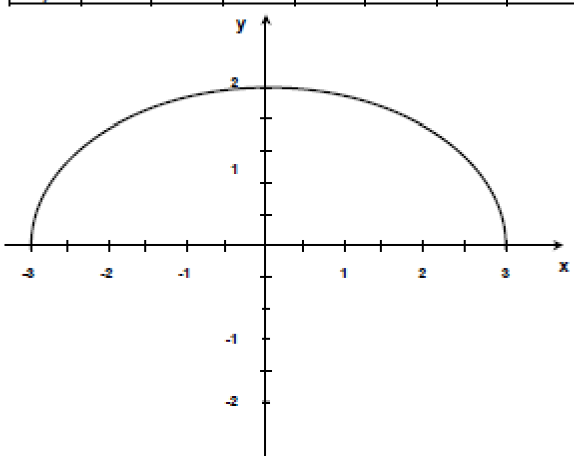
Resolviendo la desigualdad: $\dfrac{36-4x^2}{9} \geq 0$, se tiene que:

$36 - 4x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 < 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 9$

$\exists\, y\ \forall x$ con $-3 \leq x \leq 3$

$D_f = [-3, 3]$

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0	1.105	1.490	1.732	1.885	1.972	2	1.972	1.885	1.732	1.490	1.105	0



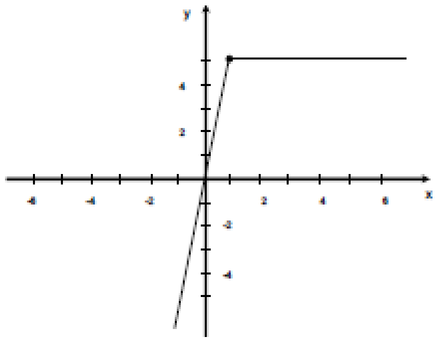
FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS

Explicar el comportamiento de las siguientes funciones y establecer su dominio.

1) $f(x)=\begin{cases}5x & x\le 1\\ 5 & x>1\end{cases}$

La función es lineal hasta 1 y es constante en 5 desde un valor mayor de 1.

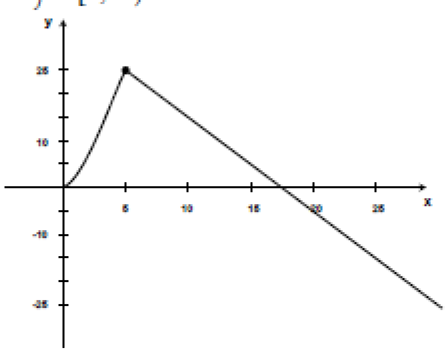
$D_f=(-\infty,\infty)$



2) $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 5\\ 35-2x & x>5\end{cases}$

La función es cuadrática desde cero hasta 5 y se convierte en una recta de pendiente negativa a partir de un valor mayor a 5.

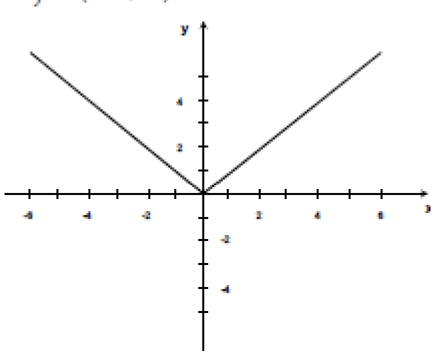
$D_f=[0,\infty)$



3) $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}$

Si x vale cero, la función es cero. Si x es positiva, la función toma su valor idéntico. Si x es negativa, la función toma su inverso aditivo. Por lo tanto, representa a la función $f(x)=|x|$.

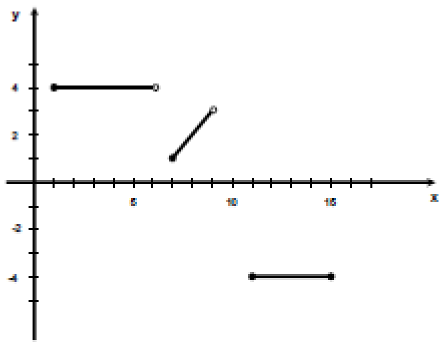
$D_f=(-\infty,\infty)$



4) $f(x)=\begin{cases} 4 & 1\leq x<6 \\ x-6 & 7\leq x<9 \\ -4 & 11\leq x\leq 15 \end{cases}$

La función es constante en 4 desde 1 hasta antes de 6, a partir de 7 y hasta antes de nueve es igual a la función identidad. Finalmente, la función es constante en –4 a partir de 11 y hasta 15.

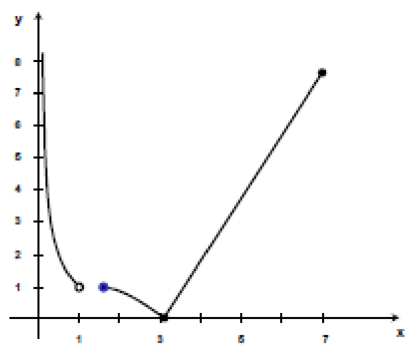
$D_f=[1,6)\cup[7,9)\cup[11,15]$



5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<1 \\ sen\,x & \dfrac{\pi}{2}\leq x\leq \pi \\ -2\pi+2x & \pi<x\leq 7 \end{cases}$

La función es de proporcionalidad inversa si es mayor de cero y menor de 1, es igual al seno desde $\dfrac{\pi}{2}$ y hasta π. Finalmente, la función es lineal después de π y hasta 7.

$D_f=(0,1)\cup\left[\dfrac{\pi}{2},7\right]$



LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

ENTORNOS

Obtener el entorno del punto $a = 5$ y con la semiamplitud $\delta = 0.6$

Entorno de $a = (5 - 0.6, 5 + 0.6) = (4.4, 5.6)$

$= \{x \mid \quad 4.4 < x < 5.6\}$

$= |x - 5| < 0.6$

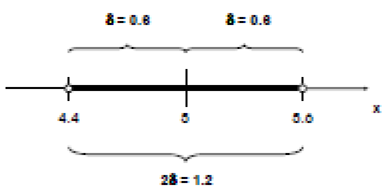
esto significa que el entorno de a son todos los valores de x desde 4.4 hasta 5.6, pero sin incluir a los extremos. Verificando algunos valores dentro del entorno:

si $x = 4.7$:

$|4.7 - 5| = |-0.3| = 0.3 < 0.6$

si $x = 5.42$:

$|5.42 - 5| = 0.42 < 0.6$



Obtener el entorno del punto $a = -3$ y con la semiamplitud $\delta = 1.2$.

Entorno de $a = (-3 - 1.2, -3 + 1.2) = (-4.2, -1.8)$

$= \{x \mid \quad -4.2 < x < -1.8\}$

$= |x + 3| < 1.2$

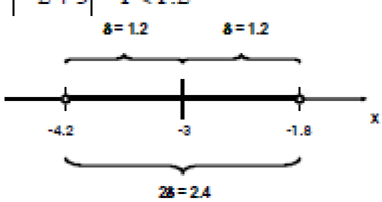
esto significa que el entorno de a son todos los valores de x desde -4.2 hasta -1.8, pero sin incluir a los extremos:

si $x = -3.8$:

$|-3.8 + 3| = |-0.8| = 0.8 < 1.2$

si $x = -2$:

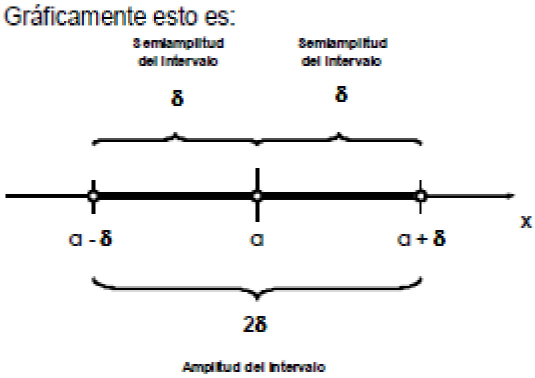
$|-2 + 3| = 1 < 1.2$



Se define como *entorno reducido* de un punto a en x al entono que excluye al propio punto a. Es decir, es el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ donde $x \neq a$.

El entorno reducido de a también puede escribirse como: $\{x \mid \quad a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a\}$, o bien como: $0 < |x - a| < \delta$.

Gráficamente esto es:



Obtener el entorno reducido del punto $a=6$ y con la semiamplitud $\delta=0.3$

Entorno reducido de $a=(6-0.3,6+0.3)=(5.7,\,6.3)$ si $x\neq 6$

$=\{x\mid \quad 5.7<x<6.3,\quad x\neq 6\}$

$=0<|x-6|<0.3$

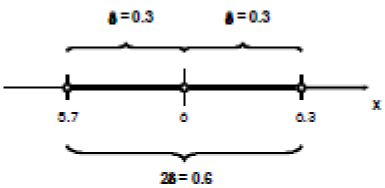
esto significa que el entorno reducido de a son todos los valores de x desde 5.7 hasta 6.3, quitando el 6 y sin incluir a los extremos:

si $x=6.15$:

$|6.15-6|=0.15<0.3$

si $x=5.93$:

$|5.93-6|=|-0.07|=0.07<0.3$



Obtener el entorno reducido del punto $a=-1.8$ y con la semiamplitud $\delta=0.22$.

Entorno reducido de $a=(-1.8-0.22,-1.8+0.22)=(-2.02,-1.58)$

$=\{x\mid \quad -2.02<x<-1.58,\quad x\neq -1.8\}$

$=0<|x+1.8|<0.22$

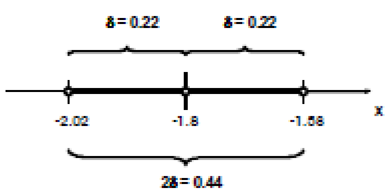
esto significa que el entorno reducido de a son todos los valores de x desde -2.02 hasta -1.58, quitando el -1.8 y sin incluir a los extremos:

si $x=-1.63$:

$|-1.63+1.8|=0.17<0.22$

si $x=-2.01$:

$|-2.01+1.8|=|-0.21|=0.21<0.22$



DEFINICIÓN DE LÍMITE

A través de la definición, calcular formalmente los siguientes límites:

1) $\lim_{x \to 2} (4x+5)$

$\lim_{x \to 2} (4x+5) = 4(2)+5 = 8+5 = 13$

aplicando la definición:

$|f(x)-L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| < \delta$

$|4x+5-13| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \delta$

$|4x-8| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \delta$

$|4(x-2)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \delta$

$|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \delta$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

$\therefore$ el límite existe y es 13

2) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x - 6)$

$\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x - 6) = 3^2 - 2(3) - 6 = 9 - 6 - 6 = -3$

aplicando la definición:

$|f(x)-L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| < \delta$

$|x^2 - 2x - 6 - (-3)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| < \delta$

$|x^2 - 2x - 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| < \delta$

$|(x+1)(x-3)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| < \delta$

$|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \delta$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{x+1}$

$\therefore$ el límite existe y es -3.

3) $\lim_{x \to 4} (x^3 + x^2 - x - 1)$

$\lim_{x \to 4} (x^3 + x^2 - x - 1) = 4^3 + 4^2 - 4 - 1 = 64 + 16 - 4 - 1 = 75$

aplicando la definición:

$|f(x)-L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| < \delta$

$|x^3 + x^2 - x - 1 - 75| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-4| < \delta$

$|x^3 + x^2 - x - 76| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-4| < \delta$

$|(x-4)(x^2 + 5x + 19)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-4| < \delta$

$|x-4| < \dfrac{\varepsilon}{x^2 + 5x + 19} \quad \Leftrightarrow \quad |x-4| < \delta$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{x^2 + 5x + 19}$

$\therefore$ el límite existe y es 75.

4) $\lim_{x\to -5}\left(-\frac{2}{x}\right)$

$\lim_{x\to -5}\left(-\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{5}$

aplicando la definición:

$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a|<\delta$

$\left|-\frac{2}{x}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-(-5)|<\delta$

$\left|\frac{-10-2x}{5x}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x+5|<\delta$

$\left|\frac{-2(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x+5|<\delta$

aplicando el valor absoluto a los términos del producto:

$2\left|\frac{(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x+5|<\delta$

$|x+5|<\frac{5x\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x-5|<\delta$

$\delta=\frac{5x\varepsilon}{2}$

$\therefore$ el límite existe y es $\frac{2}{5}$.

5) $\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}$

$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}=\sqrt{2(1)}=\sqrt{2}$

aplicando la definición:

$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a|<\delta$

$\left|\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<\delta$

multiplicando por el conjugado del binomio:

$\left|\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<\delta$

$\left|\frac{2x-2}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<\delta$

$\left|\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<\delta$

$|x-1|<\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|<\delta$

$\delta=\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2}$

$\therefore$ el límite existe y es $\sqrt{2}$.

6) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)$

$\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{-3+3}=\frac{1}{0} \quad (No\ existe)$

si se desea aplicar la definición:

$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a|<\delta$

no se puede ya que L no es un valor definido, por lo tanto, el límite no existe.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Aplicando las propiedades, calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 4} 5 = 5$

2) $\lim_{x\to -7} x = -7$

3) $\lim_{x\to 2} 6x^2 = 6(2)^2 = 6(4) = 24$

4) $\lim_{x\to 3} 3x^2 - 5x + 9 = 3(3)^2 - 5(3) + 9 = 3(9) - 5(3) + 9 = 27 - 15 + 9 = 21$

5) $\lim_{x\to -1} 5x^3 - 8x^2 + 10x - 15 = 5(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10(-1) - 15 = 5(-1) - 8(1) + 10(-1) - 15$

$= -5 - 8 - 10 - 15 = -38$

6) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{4x-6} = \dfrac{1}{4(5)-6} = \dfrac{1}{20-6} = \dfrac{1}{14}$

7) $\lim_{x\to -4} \dfrac{2x}{6x-10} = \dfrac{2(-4)}{6(-4)-10} = \dfrac{-8}{-24-10} = \dfrac{-8}{-34} = \dfrac{4}{17}$

8) $\lim_{x\to 2} (2x)^3 = (2(2))^3 = 4^3 = 64$

9) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$

10) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

11) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{3^2-9}{3-3} = \dfrac{9-9}{3-3} = \dfrac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

12) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2+x-6} = \dfrac{2(2)-4}{2^2+2-6} = \dfrac{4-4}{4+2-6} = \dfrac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

13) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \dfrac{4^2-16}{4^2-6(4)+8} = \dfrac{16-16}{16-24+8} = \dfrac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x-2} = \frac{4+2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

14) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2-1\right)(x+2)}{x^2+3x+2}=\dfrac{\left((-1)^2-1\right)(-1+2)}{(-1)^2+3(-1)+2}=\dfrac{(1-1)(-1+2)}{1-3+2}=\dfrac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-1\right)(x+2)}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2$$

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\dfrac{1^2-1}{1^2-3(1)+2}=\dfrac{1-1}{1-3+2}=\dfrac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

16) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\dfrac{4^2+4-20}{4^2-4-12}=\dfrac{16+4-20}{16-4-12}=\dfrac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+5}{x+3}=\frac{4+5}{4+3}=\frac{9}{7}$$

17) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\dfrac{6^2-11(6)+30}{6^2-13(6)+42}=\dfrac{36-66+30}{36-78+42}=\dfrac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-5)}{(x-6)(x-7)}=\lim_{x\to 6}\frac{x-5}{x-7}=\frac{6-5}{6-7}=\frac{1}{-1}=-1$$

18) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-14x+49}{x-7}=\dfrac{7^2-14(7)+49}{7-7}=\dfrac{49-98+49}{7-7}=\dfrac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

19) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{5-5}=\dfrac{1}{0}\quad (\textit{no existe})$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2^2-4}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4-4}=\dfrac{0}{0}$

multiplicando por el binomio conjugado del numerador para deshacer la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{(2+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4\left(2\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

21) $\lim_{x\to 8}\dfrac{x+8}{-2x+16}=\dfrac{8+8}{-2(8)+16}=\dfrac{8+8}{-16+16}=\dfrac{16}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2x+16}=\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2(x-8)}$$

como no se puede simplificar, el límite no existe.

22) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^2-25}=\dfrac{5^3-125}{5^2-25}=\dfrac{125-125}{25-25}=\dfrac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+25}{x+5}=\frac{5^2+5(5)+25}{5+5}$$

$$=\frac{25+25+25}{10}=\frac{75}{10}=\frac{15}{2}$$

23) $\lim_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\dfrac{7-7}{\sqrt{7-7}}=\dfrac{0}{\sqrt{0}}=\dfrac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación, se eleva al cuadrado:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{\left(\sqrt{x-7}\right)^2}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{x-7}$$

factorizando el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

24) $\lim_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\dfrac{\sqrt{6-6}}{6-6}=\dfrac{\sqrt{0}}{0}=\dfrac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, elevando al cuadrado:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-6}\right)^2}{(x-6)^2}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)^2}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}=\frac{1}{6-6}=\frac{1}{0}\quad (\textit{no existe})$$

25) $\lim_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\dfrac{\sqrt{10-1}-3}{10-10}=\dfrac{\sqrt{9}-3}{10-10}=\dfrac{3-3}{10-10}=\dfrac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se multiplica por el binomio conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}\left(\frac{\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}+3}\right)=\lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{10-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

LÍMITES INFINITOS

1) En la función $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty,\quad \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

el valor que anula al denominador es 3, así que el límite en el infinito se presenta en la asíntota $x=3$.

2) En la función $f(x)=\dfrac{7x}{x^2-25}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{7}{x^2-25}=\infty,\quad \lim_{x\to 5^-}\frac{7}{x^2-25}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -5^+}\frac{7}{x^2-25}=-\infty,\quad \lim_{x\to -5^-}\frac{7}{x^2-25}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son 5 y -5, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=5$ y $x=-5$.

3) En la función $f(x)=\dfrac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty,\quad \lim_{x\to 4^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -7^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty,\quad \lim_{x\to -7^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son 0, 4 y -7 respectivamente, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=0$, $x=4$ y $x=-7$.

LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Evaluar los siguientes límites trigonométricos elementales:

1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} sen\, x = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$

2) $\lim_{x \to 0} 3\cos x = 3\cos(0) = 3(1) = 3$

3) $\lim_{x \to \pi} \tan x = \tan(\pi) = \infty$

4) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cot^2 x = \cot^2 \frac{\pi}{6} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sec x} = \frac{4(0)}{\sec(0)} = \frac{4(0)}{1} = \frac{0}{1} = 0$

6) $\lim_{x \to 2\pi} \csc x = \csc(2\pi) = \infty$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{12}{2\cos 4x} = \frac{12}{2\cos 4(0)} = \frac{12}{2\cos(0)} = \frac{12}{2(1)} = \frac{12}{2} = 6$

Existen otros límites cuya evaluación no es tan simple. En este sentido, el límite de la función $\frac{sen\, x}{x}$ cuando x tiende a cero es muy importante ya que la resolución de muchos límites trigonométricos se basan en su aplicación.

Por ello, se evalúa en primera instancia:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = \frac{sen(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

aparentemente, el límite no existe. Sin embargo, si se tabula la función (x en radianes), se tiene:

x	$\frac{sen\, x}{x}$
± 1	0.841470
± 0.5	0.958851
± 0.4	0.973545
± 0.3	0.985067
± 0.2	0.993346
± 0.1	0.998334
± 0.01	0.999983
± 0.001	0.999999

Como puede apreciarse el límite tiende a la unidad[1]. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

Considerando el resultado anterior y aplicando identidades trigonométricas, obtener los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\frac{3sen\,2(0)}{5(0)}=\frac{3sen\,(0)}{0}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)(3)sen\,2x}{5(2x)}=\frac{6}{5}(1)=\frac{6}{5}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2x}{x}=\frac{4sen^2(0)}{0}=\frac{4(0)^2}{0}=\frac{0}{0}$

expresando la potencia como producto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4sen\,xsen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}4sen\,x\frac{sen\,x}{x}=4(sen\,0)(1)=4(0)(1)=0$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\frac{5(0)}{sen(5(0))}=\frac{0}{sen(0)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sen\,5x}{5x}}=\frac{1}{1}=1$$

En general, $\lim_{u\to 0}\frac{u}{sen\,u}=1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\,4x}=\frac{sen\,8(0)}{sen\,(4(0))}=\frac{sen\,(0)}{sen\,(0)}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por $8x$ y 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8xsen\,8x}{8xsen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x(1)}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8(4x)}{4sen\,4x}=\frac{8}{4}(1)=2$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{sen\,x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\tan\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}(1)\tan\frac{x}{2}=(1)\tan\frac{0}{2}=1\tan(0)=(1)(0)=0$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\frac{sen^3(2(0))}{(0)sen^2(3(0))}=\frac{(0)^3}{0(0)^2}=\frac{0}{0}$

expresando las potencias como productos y multiplicando y dividiendo por 2 y $(2x)(2x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)sen\,2xsen^2 2x}{(2x)sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1)sen^2 2x}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)sen\,2xsen\,2x}{(2x)(2x)sen^2 3x}$$

multiplicando y dividiendo por 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)(1)}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2)(2)(3x)(3x)}{(3)(3)sen\,3xsen\,3x}=\frac{8}{9}(1)(1)=\frac{8}{9}$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\frac{\cos(0)-1}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $sen^2x+\cos^2 x=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2x}{x^2}=\frac{-sen\,xsen\,x}{x(x)}=-(1)(1)=-1$$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{7x}=\dfrac{\tan(0)}{7(0)}=\dfrac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan x=\dfrac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{7x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7\cos x}=\frac{1}{7\cos(0)}=\frac{1}{7(1)}=\frac{1}{7}$$

9) $\lim\limits_{x\to 0} x\csc 6x$

aplicando la identidad trigonométrica $\csc x=\dfrac{1}{sen\,x}$ y multiplicando y dividiendo por 6:

$$\lim_{x\to 0} x\csc 6x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,6x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{6sen\,6x}=\frac{1}{6}(1)=\frac{1}{6}$$

10) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan x}{x-\pi}=\dfrac{\tan(\pi)}{\pi-\pi}=\dfrac{0}{0}$

aplicando las identidades trigonométricas $\tan x=\tan(x-\pi)$ y $\tan x=\dfrac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\tan(x-\pi)}{(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{sen(x-\pi)}{(x-\pi)\cos(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\cos(x-\pi)}=\frac{1}{\cos(\pi-\pi)}=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$$

LÍMITES QUE TIENDEN A INFINITO

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^2-5x\right)=(\infty)^2-5(\infty)=\infty-\infty=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(4x^2+3x-6\right)=4(\infty)^2+3(\infty)-6=\infty+\infty-6=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-7x^3-3x^2+2x-6\right)=-7(-\infty)^3-3(-\infty)^2+2(-\infty)+8=\infty-\infty-\infty+8=\infty$

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\dfrac{9(\infty)-6}{5(\infty)^2-2(\infty)+7}=\dfrac{\infty-6}{\infty-\infty+7}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre x^2 se tiene:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{9x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{9}{x}-\frac{6}{x^2}}{5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{0-0}{5-0+0}=\frac{0}{5}=0$$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\dfrac{18(-\infty)^3+7(-\infty)+1}{2(-\infty)^2-6(-\infty)^3-4}=\dfrac{-\infty-\infty+1}{\infty+\infty-4}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Es una indeterminación, pero si se divide todo entre x^3 se tiene:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{18x^3}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{18+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x}-6-\frac{4}{x^3}}=\frac{18+0-0}{0-6-0}=\frac{18}{-6}=-3$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\dfrac{5(\infty)^4+2(\infty)^2-8(\infty)}{3(\infty)^2-2(\infty)+10}=\dfrac{\infty+\infty-\infty}{\infty-\infty+10}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre x^4 se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^4}{x^4}+\dfrac{2x^2}{x^4}-\dfrac{8x}{x^4}}{\dfrac{3x^2}{x^4}-\dfrac{2x}{x^4}+\dfrac{10}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{10}{x^4}}=\frac{5+0-0}{0-0+0}=\frac{5}{0}\quad (\text{no existe})$$

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{19+5x+8x^2+13x^5}{14x^6+17x^4+8x^5+12x}$

Como $n<m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^5-18x+13x^2}{-11-15x^3+6x^4-2x^2}$

Como $n>m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\quad(\text{no existe})$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-9x-12x^3}{4x-14-6x^3-2x^2}$

Como $n=m=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\dfrac{-12}{-6}=2$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^3-11x+x^5}{5+x^3+7x-12x^2}$

Como $n>m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\quad(\text{no existe})$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+20x^4-2x^2}{7x^2-1-9x^3-4x^4}$

Como $n=m=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\dfrac{20}{-4}=-5$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5x^4-x^2+48}{11x^3+x^6+3-4x^2-10x}$

Como $n<m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$

LÍMITES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Evaluar numéricamente el límite: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

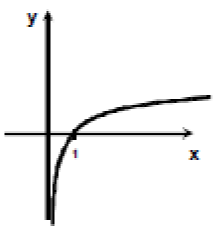
Tabulando:

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
3	1.587401
2	1.732050
1	2
0.5	2.25
0.1	2.593742
0.01	2.704813
0.001	2.716923
0.0001	2.718145
0.00001	2.718268

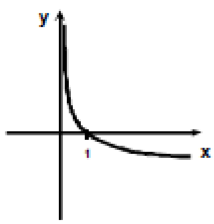
Como se puede advertir, el límite tiende a un número cercano a 2.71. Dicho límite es el número irracional conocido como e y tiene el valor aproximado de $e \approx 2.71828182846 \cdots$.

El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:

f(x) = log $_a$ x



a > 1



0 < a < 1

Evaluar numéricamente el límite: $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_{10} x}{x}$

Tabulando:

x	$\frac{\log_{10} x}{x}$
5	0.139794
10	0.100000
50	0.033979
100	0.020000
1000	0.003000
10,000	0.000400
100,000	0.000050
1'000,000	0.000006

x es más grande que su logaritmo, así que a medida que x crece, la fracción va disminuyendo. Por lo tanto: $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_{10} x}{x} = 0$

CONTINUIDAD

1) La función $f(x)=3x^2-5$ es continua en el punto $x=1$ porque $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=3(1)^2-5=3-5=-2$.

2) La función $f(x)=\sqrt{9sen\,x-5}$ es continua en el punto $x=\pi$ porque $\lim_{x\to\pi} f(x)=f(\pi)=\sqrt{9sen(\pi)-5}=\sqrt{9(1)-5}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$.

3) La función $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ es discontinua porque en el punto $x=4$ no está definida y porque el límite no existe.

4) La función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ es discontinua porque en el punto $x=3$ no está definida, aunque el límite exista: $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$.

Los siguientes tipos de funciones son continuas en sus dominios:

- Polinomiales
- Racionales
- De raíz
- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas
- Exponenciales
- Logarítmicas

Sean f y g dos funciones continuas en $x=a$, entonces las siguientes operaciones de funciones también son continuas en $x=a$:

$f+g$

$f-g$

$f\cdot g$

$\dfrac{f}{g}$ si $g(a)\neq 0$

$c\cdot f$, siendo c una constante

$f\circ g(x)=f(g(x))$, si f es continua en $g(a)$.

Determinar si las siguientes funciones son continuas en el punto dado:

1) $f(x)=8x^3-3x^2-6x+7$ en el punto $x=2$

$f(2)=8(2)^3-3(2)^2-6(2)+7=8(8)-3(4)-12+7=64-12-12+7=47$

$\lim_{x\to 2}(8x^3-3x^2-6x+7)=8(2)^3-3(2)^2-6(2)+7=8(8)-3(4)-12+7=64-12-12+7=47$

como $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$, la función sí es continua en $x=2$ (lo cual era de esperarse ya que es una función polinomial).

2) $f(x)=\sqrt{2x-10}$ en el punto $x=3$

$f(2)=\sqrt{2(3)-10}=\sqrt{6-10}=\sqrt{-4}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la inexistencia).

3) $f(x)=\dfrac{x^2-49}{x+7}$ en el punto $x=-7$

El valor $x=-7$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{x^2-49}{x+7}=\frac{(x+7)(x-7)}{x+7}=x-7$$

$$f(7)=-7-7=-14$$

$$\lim_{x\to -7}\frac{x^2-49}{x+7}=\lim_{x\to -7}\frac{(x+7)(x-7)}{x+7}=\lim_{x\to -7}(x-7)=-7-7=-14$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=-7$ pero es evitable.

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{12+3x}$ en el punto $x=-4$

$f(2)=\dfrac{(-4)^2}{12+3(-4)}=\dfrac{16}{0}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la discontinuidad).

5) $f(x)=\log_{10}x^2$ en el punto $x=10$

$$f(10)=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$$

$\lim\limits_{x\to 10}\log_{10}x^2=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$ como $\lim\limits_{x\to 10}f(x)=f(10)$, la función sí es continua en $x=10$ (lo cual era de esperarse ya que es una función logarítmica).

6) $f(x)=\dfrac{8x^5-24x^4}{4x}$ en el punto $x=0$

El valor $x=0$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{4x(2x^4-6x^3)}{4x}=2x^4-6x^3$$

$$f(0)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^5-24x^4}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x(2x^4-6x^3)}{4x}=\lim_{x\to 0}(2x^4-6x^3)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=0$ pero es evitable.

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{5x-2}{3x-18}$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en el punto $x=6$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no es evitable.

2) $f(x)=\dfrac{10x^3+5}{9x-x^2}$

$f(x)=\dfrac{10x^3+5}{x(9-x)}$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=0$ y $x=9$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no son evitables.

3) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

$f(x)=\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x-2)(x-5)}=\dfrac{x+5}{x-2}$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=2$ y $x=5$ (ya que ahí se anula el denominador). Sin embargo, en $x=5$ es evitable.

4) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ 24-2x & x>4 \end{cases}$

$f(4)=(4)^2=16$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} x^2=(4)^2=16$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(24-2x)=24-2(4)=24-8=16$

como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ entonces el $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=16$ ****aca voy quitar

Por lo tanto, hay continuidad en el intervalo $[0,\infty)$.

1) Sea $y=4x^2-3$, obtener Δx y Δy si x pasa de 2 a 2.5

$x_1=2,\quad x_2=2.5$

$\Delta x=2.5-2=0.5$

$y_1=f(x_1)=f(2)=4(2)^2-3=16-3=13$

$y_2=f(x_2)=f(2.5)=4(2.5)^2-3=25-3=22$

$\Delta y=y_2-y_1$

$\Delta y=22-13=9$

2) Sea $y=6x^3-2x-10$, obtener Δx y Δy si x pasa de 3 a 3.02

$x_1=3,\quad x_2=3.02$

$\Delta x=3.04-3=0.02$

$y_1=f(x_1)=f(3)=6(3)^3-2(3)-10=162-6-10=146$

$y_2=f(x_2)=f(3.02)=6(3.02)^3-2(3.02)-10=165.2616-6.04-10=149.2216$

$\Delta y=y_2-y_1$

$\Delta y=149.2216-146=3.2216$

Aplicando el método de los cuatro pasos, obtener la derivada de las siguientes funciones.

1) $y = 5x - 3$

$f(x) = 5x - 3$

1^er^ paso: $f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x) - 3$

2º paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = 5(x + \Delta x) - 3 - (5x - 3)$

$= 5x + 5\Delta x - 3 - 5x + 3 = 5\Delta x$

3^er^ paso: $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$

$\therefore \quad f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = 5$

2) $y = 4x^2 - 7x + 6$

$f(x) = 4x^2 - 7x + 6$

1^er^ paso: $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) + 6$

$= 4\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 7x - 7\Delta x + 6 = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 7x - 7\Delta x + 6$

2º paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 7x - 7\Delta x + 6 - \left(4x^2 - 7x + 6\right)$

$= 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 7x - 7\Delta x + 6 - 4x^2 + 7x - 6$

$= 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 7\Delta x$

3^er^ paso: $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 7\Delta x}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x - 7$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x - 7) = 8x - 7$

$\therefore \quad f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = 8x - 7$

3) $y = 2x^3 - 5x - 11$

$f(x) = 2x^3 - 5x - 11$

1^er^ paso: $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^3 - 5(x + \Delta x) - 11$

$= 2\left(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) - 5x - 5\Delta x - 11 = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 5x - 5\Delta x - 11$

2º paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 5x - 5\Delta x - 11 - \left(2x^3 - 5x - 11\right)$

$= 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 5x - 5\Delta x - 11 - 2x^3 + 5x + 11 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 5\Delta x$

3^er^ paso: $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 5\Delta x}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5\right) = 6x^2 - 5$

$\therefore \quad f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = 6x^2 - 5$

4) $y=\frac{7}{x^2}$

$f(x)=\frac{7}{x^2}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}$

2° paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}-\frac{7}{x^2}$, simplificando las fracciones:

$$=\frac{7x^2-7(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7x^2-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

$$=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}}{\Delta x}=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2\Delta x}=\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}$

4° paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{-14x}{x^2x^2}=\frac{-14x}{x^4}=-\frac{14}{x^3}$

$\therefore\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{14}{x^3}$

5) $y=\sqrt{3x}$

$f(x)=\sqrt{3x}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}$

2° paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}-\sqrt{3x}$

multiplicando arriba y abajo por el conjugado del binomio, se tiene:

$$=\left(\sqrt{3x+3\Delta x}-\sqrt{3x}\right)\cdot\frac{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3x+3\Delta x-3x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\left(\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}\right)\Delta x}=\frac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$

4° paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3}{\sqrt{3x}+\sqrt{3x}}=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$

$\therefore\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$

Determinar los puntos en que la función $f(x)=|x|$ es derivable.

Como el valor absoluto de x presenta tres posibles valores, se analiza por separado:

- Si $x>0$, se tiene: $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$

Por tanto, la función es derivable para $x>0$.

- Si $x<0$, se tiene:

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-1)=-1$

Por tanto, la función es derivable para $x<0$.

- Si $x=0$, se tiene:

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}$ (si existe)

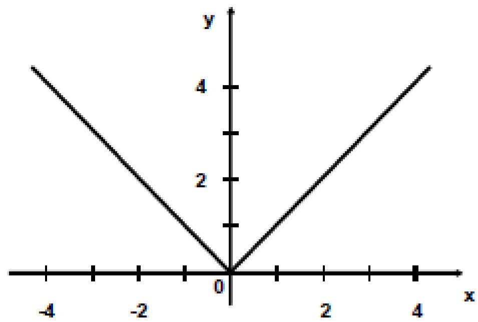
Se comparan los límites laterales por separado:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(-1)=-1$$

Puesto que $\lim_{\Delta x\to 0^+} f(0)\neq \lim_{\Delta x\to 0^-} f(0)$, no existe $f'(0)$. Por lo tanto $f(x)$ es derivable para toda x excepto en $x=0$.

En la gráfica siguiente se aprecia como la función no posee tangente en $x=0$



y = f(x) = |x|

Aplicando las fórmulas de derivación, obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $y=4$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

2) $y=7x$

$$\frac{dy}{dx}=7$$

3) $y=4x^3$

$$\frac{dy}{dx}=12x^2$$

4) $y=8x^2-5x+6$

$$\frac{dy}{dx}=16x-5$$

5) $y=x^3-9x^2-11x+1$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-18x-11$$

6) $y=(6x^2-7x-2)^5$

Aplicando la regla de la cadena:

$u=6x^2-7x-2$

$y=u^5$

$$\frac{dy}{du}=5u^4$$

$$\frac{du}{dx}=12x-7$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=5(6x^2-7x-2)^4(12x-7)$$

7) $y=\left(8x^4-5x^2-13x\right)^3$

$$\frac{dy}{dx}=3\left(8x^4-5x^2-13x\right)^2\left(32x^3-10x-13\right)$$

8) $y=\left(7x^3-2x^4-5x-6\right)^5$

$$\frac{dy}{dx}=5\left(7x^3-2x^4-5x-6\right)^4\left(21x^2-8x^3-5\right)$$

9) $y=\left(9x^2-12x+8\right)\left(-5x^2-11x+4x^3-13\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(9x^2-12x+8\right)\left(-10x-11+12x^2\right)+\left(-5x^2-11x+4x^3-13\right)\left(18x-12\right)$$

10) $y=\left(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5\right)\left(15x^2-6x+9\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5\right)\left(30x-6\right)+\left(15x^2-6x+9\right)\left(40x^3-48x^2-16x+7\right)$$

11) $y=\left(11x^2-17x\right)\left(8x^3-9\right)\left(6x^4-4\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(11x^2-17x\right)\left(8x^3-9\right)\left(24x^3\right)+\left(11x^2-17x\right)\left(6x^4-4\right)\left(24x^2\right)+\left(8x^3-9\right)\left(6x^4-4\right)\left(22x-17\right)$$

12) $y=\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(2x^2+1\right)\left(3x^3-16x^2\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(2x^2+1\right)\left(9x^2-32x\right)+\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(3x^3-16x^2\right)\left(4x\right)$$
$$+\left(2x^2+1\right)\left(3x^3-16x^2\right)\left(15x^4-48x^3\right)$$

13) $y=\left(4x^2-9x^3\right)^5\left(6x^8+14x\right)^7$

$$\frac{dy}{dx}=\left(4x^2-9x^3\right)^5 7\left(6x^8+14x\right)^6\left(48x^7+14\right)+\left(6x^8+14x\right)^7 5\left(4x^2-9x^3\right)^4\left(8x-27x^2\right)$$

14) $y=\dfrac{4x^2-x-11}{6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-1}{6}$$

15) $y=\dfrac{7\left(4x^3-2x^5-1\right)^3}{-9}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{21\left(4x^3-2x^5-1\right)^2\left(12x^2-10x^4\right)}{9}$$

16) $y=\sqrt{x}$

$y=x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

17) $y=\sqrt[5]{x^3}$

$y=x^{\frac{3}{5}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

18) $y=\sqrt[4]{9x^6}$

$y=(9x^6)^{\frac{1}{4}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}(9x^6)^{-\frac{3}{4}}54x^5=\frac{54x^5}{4(9x^6)^{\frac{3}{4}}}=\frac{54x^5}{4\sqrt[4]{(9x^6)^3}}$

19) $y=\sqrt[6]{2x^8}$

$y=(2x^8)^{\frac{1}{6}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6}(2x^8)^{-\frac{5}{6}}16x^7=\frac{16x^7}{6(2x^8)^{\frac{5}{6}}}=\frac{8x^7}{3\sqrt[6]{(2x^8)^5}}$

20) $y=\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$

$y=\frac{1}{x^{\frac{4}{7}}}=x^{-\frac{4}{7}}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{7}x^{-\frac{11}{7}}=-\frac{4}{7x^{\frac{11}{7}}}=-\frac{4}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$

21) $y=\sqrt[3]{2x-7x^4}$

$y=(2x-7x^4)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(2x-7x^4)^{-\frac{2}{3}}(2-28x^3)=\frac{2-28x^3}{3(2x-7x^4)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2-28x^3}{3\sqrt[3]{(2x-7x^4)^2}}$

22) $y=\frac{-41}{\sqrt[6]{5x^9-8x^2}}$

$y=\frac{-41}{(5x^9-8x^2)^{\frac{1}{6}}}=-41(5x^9-8x^2)^{-\frac{1}{6}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{41}{6}(5x^9-8x^2)^{-\frac{7}{6}}(45x^8-16x)=\frac{41(45x^8-16x)}{6(5x^9-8x^2)^{\frac{7}{6}}}=\frac{41(45x^8-16x)}{6\sqrt[6]{(5x^9-8x^2)^7}}$

23) $y=\dfrac{7x^2-3x-2}{5x^2-11x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(5x^2-11x)(14x-3)-(7x^2-3x-2)(10x-11)}{(5x^2-11x)^2}$$

24) $y=\dfrac{8x^4-13x^3+4}{7x^5+x-5x^6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(7x^5+x-5x^6)(32x^3-39x^2)-(8x^4-13x^3+4)(35x^4+1-30x^5)}{(7x^5+x-5x^6)^2}$$

25) $y=\dfrac{(7x^3-11x-1)^3}{\sqrt[5]{x^8-2x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)3(7x^3-11x-1)^2(21x^2-11)-(7x^3-11x-1)^3\frac{1}{5}(x^8-2x)^{-\frac{4}{5}}(8x^7-2)}{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)3(7x^3-11x-1)^2(21x^2-11)-(7x^3-11x-1)^3\dfrac{8x^7-2}{5\sqrt[5]{(x^8-2x)^4}}}{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)^2}$$

26) $y=\dfrac{17}{x^5-3}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{17(5x^4)}{(x^5-3)^2}$$

27) $y=\dfrac{6}{3x^6-5x^4}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{6(18x^5-20x^3)}{(3x^6-5x^4)^2}$$

28) $y=\dfrac{-14}{(8x^9-2x)^3}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(-14)3(8x^9-2x)^2(72x^8-2)}{(8x^9-2x)^6}=\frac{14(72x^8-2)}{(8x^9-2x)^4}$$

29) $y=\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}$

$$y=4x^{-1}-12x^{-2}+7x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-4x^{-2}+24x^{-3}-21x^{-4}=-\frac{4}{x^2}+\frac{24}{x^3}-\frac{21}{x^4}$$

30) $y=\frac{6}{8x^7}+\frac{14}{5x^2}+9x-3x^2-\frac{15}{x^4}$

$y=\frac{6}{8}x^{-7}+\frac{14}{5}x^{-2}+9x-3x^2-15x^{-4}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{42}{8}x^{-8}-\frac{28}{5}x^{-3}+9-6x+60x^{-5}=-\frac{42}{8x^8}-\frac{28}{5x^3}+9-6x+\frac{60}{x^5}$

Obtener la tercera derivada de la función $y=2x^3-4x^2-5x-12$

$\frac{dy}{dx}=6x^2-8x-5$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=12x-8$

$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=12$

Obtener la quinta derivada de la función $y=2x^6-7x^4+5x^3-9x^2-19$

$\frac{dy}{dx}=12x^5-28x^3+15x^2-18x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=60x^4-84x^2+30x-18$

$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=240x^3-168x+30$

$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=720x^2-168$

$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=1{,}440x$

Obtener la séptima derivada de la función $y=\frac{5}{x}$

$y=5x^{-1}$

$\frac{dy}{dx}=-5x^{-2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=10x^{-3}$

$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-30x^{-4}$

$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=120x^{-5}$

$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=-600x^{-6}$

$\frac{d^6y}{dx^6}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)=3{,}600x^{-7}$

$\frac{d^7y}{dx^7}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right)=25{,}200x^{-8}=\frac{25{,}200}{x^8}$

Hallar la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

1) $4x^2y^3+5x^4-2y^5-12=0$

$$\frac{d}{dx}4x^2y^3+\frac{d}{dx}5x^4-\frac{d}{dx}2y^5-\frac{d}{dx}12=\frac{d}{dx}0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx}+y^3 8x+20x^3-10y^4\frac{dy}{dx}-0=0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx}-10y^4\frac{dy}{dx}=-8xy^3-20x^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(12x^2y^2-10y^4\right)=-8xy^3-20x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-8xy^3-20x^3}{12x^2y^2-10y^4}$$

2) $3x^5-6x^4y^6+2y^3+8x^3-7y^5+15=0$

$$\frac{d}{dx}3x^5-\frac{d}{dx}6x^4y^6+\frac{d}{dx}2y^3+\frac{d}{dx}8x^3-\frac{d}{dx}7y^5+\frac{d}{dx}15=\frac{d}{dx}0$$

$$15x^4-\left(6x^4 6y^5\frac{dy}{dx}+y^6 24x^3\right)+6y^2\frac{dy}{dx}+24x^2-35y^4\frac{dy}{dx}+0=0$$

$$15x^4-36x^4y^5\frac{dy}{dx}-24x^3y^6+6y^2\frac{dy}{dx}+24x^2-35y^4\frac{dy}{dx}=0$$

$$-36x^4y^5\frac{dy}{dx}+6y^2\frac{dy}{dx}-35y^4\frac{dy}{dx}=-15x^4+24x^3y^6-24x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-36x^4y^5+6y^2-35y^4\right)=-15x^4+24x^3y^6-24x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-15x^4+24x^3y^6-24x^2}{-36x^4y^5+6y^2-35y^4}$$

3) $8x^4-2x^3y^4+7x^7-10x^3y-11=0$

$$\frac{d}{dx}8x^4-\frac{d}{dx}2x^3y^4+\frac{d}{dx}7x^7-\frac{d}{dx}10x^3y-\frac{d}{dx}11=\frac{d}{dx}0$$

$$32x^3-\left(2x^3 4y^3\frac{dy}{dx}+y^4 6x^2\right)+49x^6-\left(10x^3\frac{dy}{dx}+y30x^2\right)-0=0$$

$$32x^3-8x^3y^3\frac{dy}{dx}-6x^2y^4+49x^6-10x^3\frac{dy}{dx}-30x^2y=0$$

$$-8x^3y^3\frac{dy}{dx}-10x^3\frac{dy}{dx}=-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-8x^3y^3-10x^3\right)=-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y}{-8x^3y^3-10x^3}$$

4) $6x^3-11x^2y^3+5y^4-8x^3y^5+5x-11=0$

$$\frac{d}{dx}6x^3-\frac{d}{dx}11x^2y^3+\frac{d}{dx}5y^4-\frac{d}{dx}8x^3y^5+\frac{d}{dx}5x-\frac{d}{dx}11=\frac{d}{dx}0$$

$$18x^2-\left(11x^2 3y^2\frac{dy}{dx}+y^3 22x\right)+20y^3\frac{dy}{dx}-\left(8x^3 5y^4\frac{dy}{dx}+y^5 24x^2\right)+5-0=0$$

$$18x^2-33x^2y^2\frac{dy}{dx}-22xy^3+20y^3\frac{dy}{dx}-40x^3y^4\frac{dy}{dx}-24x^2y^5+5=0$$

$$-33x^2y^2\frac{dy}{dx}+20y^3\frac{dy}{dx}-40x^3y^4\frac{dy}{dx}=-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-33x^2y^2+20y^3-40x^3y^4\right)=-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5}{-33x^2y^2+20y^3-40x^3y^4}$$

5) $8x^4+12x^3y^2+9y^2-10xy+6x-4=0$

$$\frac{d}{dx}8x^4+\frac{d}{dx}12x^3y^2+\frac{d}{dx}9y^2-\frac{d}{dx}10xy+\frac{d}{dx}6x-\frac{d}{dx}4=\frac{d}{dx}0$$

$$32x^3+\left(12x^3 2y\frac{dy}{dx}+y^2 36x^2\right)+18y\frac{dy}{dx}-\left(10x\frac{dy}{dx}+y10\right)+6-0=0$$

$$32x^3+24x^3y\frac{dy}{dx}+36x^2y^2+18y\frac{dy}{dx}-10x\frac{dy}{dx}-10y+6=0$$

$$24x^3y\frac{dy}{dx}+18y\frac{dy}{dx}-10x\frac{dy}{dx}=-32x^3-36x^2y^2+10y-6$$

$$\frac{dy}{dx}\left(24x^3y+18y-10x\right)=-32x^3-36x^2y^2+10y-6$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-32x^3-36x^2y^2+10y-6}{24x^3y+18y-10x}$$

Obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones:

1) $3x^2+7x^4y^2+8x^2y^6-9y^5+6x+2=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+28x^3y^2+16xy^6+6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=14x^4y+48x^2y^5-45y^4$$

2) $4x^4y^3-6x^2+3y^7-9x^2y^4-12=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=16x^3y^3-12x-18xy^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=12x^4y^2+21y^6-36x^2y^3$$

Aplicando derivadas parciales, obtener $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

1) $5x^4 - 12x^3y^2 + 9y^2 - 10 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-20x^3 + 36x^2y^2}{-24x^3y + 18y}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x - 7y^5 + 15 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 8}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

Comprobar los resultados de los primeros cinco ejercicios resueltos de este subtema.

1) $4x^2y^3 + 5x^4 - 2y^5 - 12 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-8xy^3 - 20x^3}{12x^2y^2 - 10y^4}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x^3 - 7y^5 + 15 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

3) $8x^4 - 2x^3y^4 + 7x^7 - 10x^3y - 11 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y}{-8x^3y^3 - 10x^3}$$

4) $6x^3 - 11x^2y^3 + 5y^4 - 8x^3y^5 + 5x - 11 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5}{-33x^3y^2 + 20y^3 - 40x^3y^4}$$

5) $8x^4 + 12x^3y^2 + 9y^2 - 10xy + 6x - 4 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6}{24x^3y + 18y - 10x}$$

Obtener la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $\left.\begin{array}{l} x = 4t^2 - 6t + 9 \\ y = 5t^3 - 7t^2 - 10t + 2 \end{array}\right\}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t - 6}{15t^2 - 14t - 10}$$

2) $\left.\begin{array}{l} x = \left(8t^3 - 11t^2 - 13\right)^4 \\ y = \left(12t^4 - 13t^2\right)\left(4t^2 - 5t^5\right) \end{array}\right\}$

Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla de la cadena y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(12t^4 - 13t^2\right)\left(8t - 25t^4\right) + \left(4t^2 - 5t^5\right)\left(48t^3 - 26t\right)}{4\left(48t^3 - 11t^2 - 13\right)^3\left(24t^2 - 22t\right)}$$

3) $\left.\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sqrt[8]{5t} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = t^{\frac{1}{3}} \\ y = (5t)^{\frac{1}{8}} \end{array}\right\}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{5}{8\sqrt[8]{(5t)^7}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}$$

4) $\left.\begin{array}{l} x = -\frac{3}{t^5} \\ y = \frac{2}{\sqrt{t}} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = -3t^{-5} \\ y = 2t^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{t^3}}}{\frac{15}{t^6}}$$

5) $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{2-9t^4} \\ y=\dfrac{4t-8}{6t^3-7t^5} \end{array}\right\}$

Para hallar $\dfrac{dx}{dt}$ se aplica la regla $\dfrac{d}{dt}\sqrt{u}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\dfrac{du}{dt}$ y para encontrar $\dfrac{dy}{dt}$ se aplica la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{(6t^3-7t^5)(4)-(4t-8)(18t^2-35t^4)}{(6t^3-7t^5)^2}}{-\dfrac{18t^3}{\sqrt{2-9t^4}}}$$

Obtener la segunda derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $\left.\begin{array}{l} x=4t^2-5t+1 \\ y=2t^3-21 \end{array}\right\}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2}{8t-5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{6t^2}{8t-5}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{(8t-5)(12t)-(6t^2)(8)}{(8t-5)^2}\cdot\frac{1}{8t-5}=\frac{96t^2-60t-48t^2}{(8t-5)^3}$$

$$=\frac{48t^2-60t}{(8t-5)^3}$$

2) $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{t} \\ y=3t^5 \end{array}\right\}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{15t^4}{-\frac{1}{t^2}}=-15t^6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-15t^6\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-90t^5\cdot\left(-t^2\right)=90t^7$$

Obtener la derivada de la función inversa de:

1) $f(x)=8x-6$

Forma 1. Obteniendo la función inversa:

$$x=8y-6 \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x+6}{8}$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{8}$$

Forma 2. Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{8}$$

2) $f(x)=x^2-5$

Forma 1. Obteniendo la función inversa:

$$x=y^2-5 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x+5}$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

Forma 2. Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

3) $f(x)=\sqrt{4x+1}$

Forma 1. Obteniendo la función inversa:

$$x=\sqrt{4y+1} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x^2-1}{4}$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$$

Forma 2. Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{4}{2\sqrt{4y+1}}}=\frac{2\sqrt{4y+1}}{4}=\frac{x}{2}$$

Aplicando la expresión $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=(x+3)^2$

Obteniendo la función inversa:

$$x=(y+3)^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2(y+3)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{x}-3+3\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $f(x)=\frac{5}{x}$

Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{5}{y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{5}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{-5}{y^2}}=-\frac{y^2}{5}=-\frac{\left(\frac{5}{x}\right)^2}{5}=-\frac{25}{5x^2}=-\frac{5}{x^2}$$

3) $f(x)=\dfrac{2}{x-17}$

Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{2}{y-17} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{2}{x}+17$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{2}{(y-17)^2}}=-\frac{(y-17)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}-17+17\right)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2}=-\frac{2}{x^2}$$

4) $f(x)=\sqrt[3]{4x^2+10}$

Obteniendo la función inversa:

$$x=\sqrt[3]{4y^2+10} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{3}(4y^2+10)^{-\frac{2}{3}}(8y)}=\frac{3\sqrt[3]{(4y^2+10)^2}}{8y}=\frac{3x^2}{8\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}}$$

Derivar las siguientes funciones trigonométricas.

1) $y=sen\,4x$

$$\frac{dy}{dx}=4\cos 4x$$

2) $y=3\cos 9x$

$$\frac{dy}{dx}=3(9)(-sen\,9x)=-27sen\,9x$$

3) $y=5\tan 2x^3$

$$\frac{dy}{dx}=5(6x^2)\sec^2 2x^3=30x^2\sec^2 2x^3$$

4) $y=6\cot(5x^2-8x^7)$

$$\frac{dy}{dx}=-6(10x-56x^6)\csc^2(5x^2-8x^7)=(-60x+336x^6)\csc^2(5x^2-8x^7)$$

5) $y=8\sec 2x^4$

$$\frac{dy}{dx}=8(8x^3)\sec 2x^4\tan 2x^4=64x^3\sec 2x^4\tan 2x^4$$

6) $y=4\csc(3x^5-6x)$

$$\frac{dy}{dx}=-4(15x^4-6)\csc(3x^5-6x)\cot(3x^5-6x)=(-60x^4+24)\csc(3x^5-6x)\cot(3x^5-6x)$$

7) $y=12sen(4x^2-9x+7)$

$$\frac{dy}{dx}=12(8x-9)\cos(4x^2-9x+7)=(96x-108)\cos(4x^2-9x+7)$$

8) $y=-6\cos\left(10x^3-8x+3\right)^5$

$$\frac{dy}{dx}=30\left(10x^3-8x+3\right)^4\left(30x^2-8\right)sen\left(10x^3-8x+3\right)^5$$

9) $y=\sqrt{\tan 3x}$

$y=(\tan 3x)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(\tan 3x)^{-\frac{1}{2}}\left(3\sec^2 3x\right)=\frac{3\sec^2 3x}{2\sqrt{\tan 3x}}$$

10) $y=\left(4\cot 2x^2\right)\left(\sec 5x^4\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(4\cot 2x^2\right)\left(20x^3\sec 5x^4\tan 5x^4\right)+\left(\sec 5x^4\right)\left(-4(4x)\csc^2 2x^2\right)$$

$$=80x^3\cot 2x^2\sec 5x^4\tan 5x^4-16x\sec 5x^4\csc^2 2x^2$$

11) $y=\dfrac{7\csc\ 2x^3}{-5sen\,8x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(-5sen\,8x\right)\left(-7\left(6x^2\right)\csc 2x^3\cot 2x^3\right)-\left(7\csc 2x^2\right)\left(-5(8)\cos 8x\right)}{\left(-5sen\,8x\right)^2}$$

$$=\frac{210x^2sen\,8x\csc 2x^3\cot 2x^3+280\csc 2x^2\cos 8x}{25sen^2 8x}$$

12) $y=sen\,x^2$

$$\frac{dy}{dx}=2x\cos x^2$$

13) $y=sen^2 x$

$y=(sen\,x)^2$

$$\frac{dy}{dx}=2sen\,x\cdot\cos x$$

14) $y=\cos x^3$

$$\frac{dy}{dx}=-3x^2sen\,x^3$$

15) $y=\cos^3 x$

$y=(\cos x)^3$

$$\frac{dy}{dx}=3\cos^2 x\left(-sen\,x\right)=-3\cos^2 x\,sen\,x$$

16) $y = \cot^7 9x^4$

$y = \left(\cot 9x^4\right)^7$

$\dfrac{dy}{dx} = 7\cot^6 9x^4\left(-36x^3 \csc^2 9x^4\right) = -252x^3 \cot^6 9x^4 \csc^2 9x^4$

17) $y = \left(10\sec 15x^3\right)\left(8\tan 9x\right)$

$\dfrac{dy}{dx} = \left(10\sec 15x^3\right)\left(8(9)\sec^2 9x\right) + \left(8\tan 9x\right)\left(10\left(45x^2\right)\sec 15x^3 \tan 15x^3\right)$

$= 720\sec 15x^3 \sec^2 9x + 3600x^2 \tan 9x \sec 15x^3 \tan 15x^3$

18) $y = \dfrac{sen\, 10x^3}{\cos 10x^3}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\cos 10x^3\right)\left(30x^2 \cos 10x^3\right) - \left(sen\, 10x^3\right)\left(-30x^2 sen\, 10x^3\right)}{\left(\cos 10x^3\right)^2}$

$= \dfrac{30x^2 \cos^2 10x^3 + 30x^2 sen^2 10x^3}{\cos^2 10x^3} = \dfrac{30x^2\left(\cos^2 10x^3 + sen^2 10x^3\right)}{\cos^2 10x^3} = \dfrac{30x^2}{\cos^2 10x^3} = 30x^2 \sec^2 10x^3$

19) $y = \tan 10x^3$

$\dfrac{dy}{dx} = 30x^2 \sec^2 10x^3$

20) $y = \dfrac{1}{sen^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}$

$y = sen^{-5}\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

$\dfrac{dy}{dx} = -5\left(44x^3 - 12x\right)sen^{-6}\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\cos\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

pero como $\dfrac{\cos u}{sen\, u} = \cot u$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5\left(44x^3 - 12x\right)\cos\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}{sen^6\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)} = -\dfrac{5\left(44x^3 - 12x\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}{sen^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)}$

y $\dfrac{1}{sen\, u} = \csc u$, se tiene:

$\dfrac{dy}{dx} = -5\left(44x^3 - 12x\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\csc^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

21) $y = \csc^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

$\dfrac{dy}{dx} = 5\left(44x^3 - 12x\right)\csc^4\left(11x^4 - 6x + 8\right)\cdot\left(-\csc\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\right)$

$\dfrac{dy}{dx} = -5\left(44x^3 - 12x\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\cdot \csc^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y = sen^{-1} 5x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5) = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

2) $y = \cos^{-1}\frac{1}{3}x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}}$$

3) $y = \tan^{-1} 2x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(2x^3)^2}(6x^2) = \frac{6x^2}{1+4x^6}$$

4) $y = \cot^{-1} 10x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+(10x^4)^2}(40x^3) = \frac{-40x^3}{1+100x^8}$$

5) $y = 2\sec^{-1}(13x^2 - 12x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(13x^2-12x+1)\sqrt{(13x^2-12x+1)^2-1}}(26x-12)$$

$$= \frac{52x-24}{(13x^2-12x+1)\sqrt{(13x^2-12x-12)^2-1}}$$

6) $y = -9\csc^{-1}(14x^3 - 4x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-9}{(14x^3-4x)\sqrt{(14x^3-4x)^2-1}}(42x^2-4)$$

$$= \frac{378x^2-36}{(14x^3-4x)\sqrt{(14x^3-4x)^2-1}}$$

7) $y = 4sen^{-1} 3x^5 \cdot \cos^{-1} 8x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4sen^{-1} 3x^5 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(8x^4)^2}}(32x^3) + \cos^{-1} 8x^4 \cdot \frac{4}{\sqrt{1-(3x^5)^2}}(15x^4)$$

$$= -4sen^{-1} 3x^5 \cdot \frac{32x^3}{\sqrt{1-64x^8}} + \cos^{-1} 8x^4 \cdot \frac{60x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}$$

8) $y = \dfrac{2\csc^{-1} 4x}{5\tan^{-1} 3x^7}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\tan^{-1}3x^7 \cdot \frac{-2}{4x\sqrt{(4x)^2-1}}(4) - 2\csc^{-1}4x \cdot \frac{5}{1+(3x^7)^2}(21x^6)}{(5\tan^{-1}3x^7)^2}$$

$$= \frac{-\frac{10\tan^{-1}3x^7}{x\sqrt{16x^2-1}} - \frac{210x^6\csc^{-1}4x}{1+9x^{14}}}{(5\tan^{-1}3x^7)^2}$$

9) $y=\sec^{-1}\sec\left(5x^2+7x-4\right)$

Por ser funciones inversas, se eliminan:

$y=5x^2+7x-4$

$\frac{dy}{dx}=10x+7$

10) $y=\sqrt[6]{\cot^{-1}2x^2}$

$y=\left(\cot^{-1}2x^2\right)^{\frac{1}{6}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6}\left(\cot^{-1}2x^2\right)^{-\frac{5}{6}}\cdot\frac{-1}{1+\left(2x^2\right)^2}(4x)=-\frac{4x}{6\sqrt[6]{\left(\cot^{-1}2x^2\right)^5}\left(1+4x^4\right)}$

Derivar las siguientes funciones:

1) $y=\log_3\left(x^4-7x^2-16\right)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-14x}{x^4-7x^2-16}\log_3 e$

2) $y=\log_5\left(sen\,3x^4\right)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^3\cos 3x^4}{sen\,3x^4}\log_5 e$

3) $y=\ln\left(2x^2-x-1\right)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-1}{2x^2-x-1}$

4) $y=\ln\cos 5x^4$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-20x^3\,sen5x^4}{\cos 5x^4}$

$=-20x^3\tan 5x^4$

5) $y=7^{5x}$

$\frac{dy}{dx}=\left(7^{5x}\ln(5x)\right)5$

6) $y=4^{\left(3x^2-9x-1\right)}$

$\frac{dy}{dx}=\left(4^{\left(3x^2-9x-1\right)}\ln\left(3x^2-9x-1\right)\right)(6x-9)$

7) $y=e^{2x^5}$

$\frac{dy}{dx}=10x^4e^{2x^5}$

8) $y=e^{\sqrt{x}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

9) $y=\log_2\left(3x^2-4x+7\right)^5$

Aplicando la propiedad:

$\log_a x^n = n\log_a x$ se tiene:

$$y=5\log_2\left(3x^2-4x+7\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(6x-4)}{3x^2-4x+7}\log_2 e$$

10) $y=\ln\left(6x^2-8x\right)\left(5x^3-2x^2\right)$

Aplicando la propiedad:

$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$ se tiene:

$$y=\ln\left(6x^2-8x\right)+\ln\left(5x^3-2x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x-8}{6x^2-8x}+\frac{15x^2-4x}{5x^3-2x^2}$$

11) $y=\ln\frac{3^{8x^2}}{4e^{3x^5}}$

Aplicando la propiedad: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ se tiene:

$$y=\ln 3^{8x^2}-\ln 4e^{3x^5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(3^{8x^2}\ln 8x^2\right)16x}{3^{8x^2}}-\frac{4e^{3x^5}\left(15x^4\right)}{4e^{3x^5}}=16x\ln 8x^2+15x^4$$

12) $y=\ln\left(\frac{\left(\sqrt[5]{\log_4\left(6x^3\right)}\right)\cdot\cos^{-1}3x^6}{(4sen\,2x)^3}\right)$

Aplicando convenientemente las propiedades de logaritmos se tiene:

$$y=\ln\sqrt[5]{\log_4 6x^3}\cdot\cos^{-1}3x^6-\ln(4sen\,2x)^3$$

$$y=\ln\sqrt[5]{\log_4 6x^3}+\ln\cos^{-1}3x^6-3\ln 4sen\,2x$$

$$y=\ln\left(\log_4 6x^3\right)^{\frac{1}{5}}+\ln\cos^{-1}3x^6-3\ln 4sen\,2x$$

$$y=\frac{1}{5}\ln\left(\log_4 6x^3\right)+\ln\cos^{-1}3x^6-3\ln 4sen\,2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\frac{\frac{18x^2}{6x^3}\log_4 e}{\log_4 6x^3}+\frac{\frac{-18x^5}{\sqrt{1-\left(3x^6\right)^2}}}{\cos^{-1}3x^6}-\frac{24\cos 2x}{4sen\,2x}$$

$$=\frac{18\log_4 e}{30x\log_4 6x^3}-\frac{18x^5}{\left(\cos^{-1}3x^6\right)\sqrt{1-9x^{12}}}-6\cot 2x$$

Hallar las ecuaciones de las recta tangente y normal de las siguientes curvas en el punto indicado.

1) $y=3x^2-5x+4 \qquad P(2,6)$

$m_1=\dfrac{dy}{dx}=6x-5\Big|_{x=2}=6(2)-5=12-5=7$

$y-6=7(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-6=7x-14 \quad \Rightarrow \quad 7x-y-8=0$ (recta tangente).

$m_2=-\dfrac{1}{m_1}=-\dfrac{1}{7}$

$y-6=-\dfrac{1}{7}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 7(y-6)=-(x-2) \quad \Rightarrow \quad 7y-42=-x+2$

$\Rightarrow \quad x+7y-44=0$ (recta normal).

2) $y=9x^3-12x-5 \qquad P(-1,-2)$

$m_1=\dfrac{dy}{dx}=27x^2-12\Big|_{x=-1}=27(-1)^2-12=27-12=15$

$y-(-2)=15(x-(-1)) \quad \Rightarrow \quad y+2=15(x+1) \quad \Rightarrow \quad y+2=15x+15$

$\Rightarrow \quad 15x-y+13=0$ (recta tangente).

$m_2=-\dfrac{1}{m_1}=-\dfrac{1}{15}$

$y-(-2)=-\dfrac{1}{15}(x-(-1)) \quad \Rightarrow \quad 15(y+2)=-(x+1) \quad \Rightarrow \quad 15y+30=-x-1$

$\Rightarrow \quad x+15y+31=0$ (recta normal).

3) $y=\dfrac{1}{x} \qquad P\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$

$m_1=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}\Big|_{x=2}=-\dfrac{1}{2^2}=-\dfrac{1}{4}$

$y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 4\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=-(x-2) \quad \Rightarrow \quad 4y-2=-x+2 \quad \Rightarrow \quad x+4y-4=0$

(recta tangente).

$m_2=-\dfrac{1}{m_1}=-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{4}}=4$

$y-\dfrac{1}{2}=4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-\dfrac{1}{2}=4x-8 \quad \Rightarrow \quad 2y-1=8x-16$

$\Rightarrow \quad 8x-2y-15=0$ (recta normal).

4) $-x^2y+6x-y^2x^2+4y-12=0 \qquad P(0,3)$

$m_1=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\dfrac{2xy-6+2xy^2}{-x^2-2x^2y+4}\Bigg|_{(0,3)}=\dfrac{2(0)(3)-6+2(0)(3)^2}{-(0)^2-2(0)^2(3)+4}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

$y-3=-\dfrac{3}{2}(x-0) \quad \Rightarrow \quad 2(y-3)=-3x \quad \Rightarrow \quad 2y-6=-3x$

$\Rightarrow \quad 3x+2y-6=0$ (recta tangente).

$m_2=-\dfrac{1}{m_1}=-\dfrac{1}{-\dfrac{6}{4}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$y-3=\dfrac{2}{3}(x-0) \quad \Rightarrow \quad 3(y-3)=2x \quad \Rightarrow \quad 3y-9=2x \quad \Rightarrow \quad 2x-3y+9=0$ (recta normal).

5) $y=-7x^4+12x^2+4x \qquad P(1,9)$

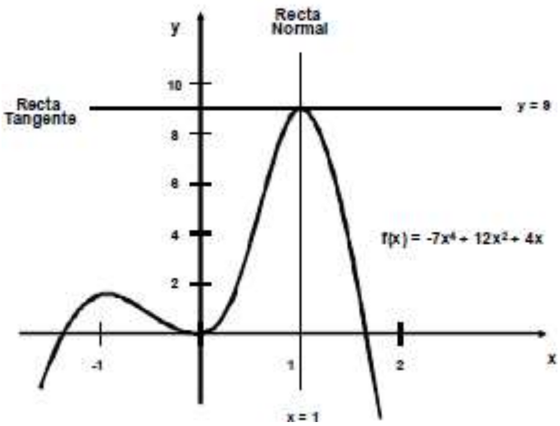
$m_1=\frac{dy}{dx}=-28x^3+24x+4\Big|_{x=1}=-28(1)^3+24(1)+4=-28+24+4=0$

$y-9=0(x-1) \Rightarrow y-9=0 \Rightarrow y=9$ (recta tangente).

$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{0}$ (pendiente de 90°, o sea, es infinita)

$y-9=-\frac{1}{0}(x-1) \Rightarrow 0(y-9)=-(x-1) \Rightarrow 0=-x+1 \Rightarrow x=1$ (recta normal).

Gráficamente, esto es:



Obtener el ángulo de intersección entre las siguientes curvas:

1) $f(x)=5x-7$ y $g(x)=-3x+9$

Igualando las funciones: $5x-7=-3x+9 \Rightarrow 8x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{8}=2$

Derivando:

$\frac{df(x)}{dx}=5$

$\frac{dg(x)}{dx}=-3$

$\Rightarrow \theta_1=\tan^{-1}\frac{5-(-3)}{1+(5)(-3)}=\tan^{-1}\frac{8}{-14}=\tan^{-1}(-0.5714)=-29.74°$

$\therefore \theta_1=29.74°$

2) $f(x)=-3x^2-10x-14$ y $g(x)=11x+16$

Igualando las funciones: $-3x^2-10x-14=11x+16 \Rightarrow -3x^2-21x-30=0$

$\Rightarrow 3x^2+21x+30=0 \Rightarrow x^2+7x+10=0 \Rightarrow (x+5)(x+2)=0$

$\therefore x_1=-5; \quad x_2=-2$

Derivando:

$\frac{df(x)}{dx}=-6x-10$

$\frac{dg(x)}{dx}=11$

Evaluando el punto $x_1=-5$:

$m_1=-6x-10\Big|_{x=-5}=-6(-5)-10=30-10=20$

$m_2=11\Big|_{x=-5}=11$

$\therefore \theta_1=\tan^{-1}\frac{20-11}{1+(20)(11)}=\tan^{-1}\frac{9}{221}=\tan^{-1}(0.0407)=2.33°$

Evaluando el punto $x_1 = -2$:

$m_1 = -6x - 10\big|_{x=-2} = -6(-2) - 10 = 12 - 10 = 2$

$m_2 = 11\big|_{x=-2} = 11$

$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{2-11}{1+(2)(11)} = \tan^{-1}\dfrac{-9}{23} = \tan^{-1}(-0.3913) = 21.37°$

3) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x-2)^2$

Igualando las funciones: $x^2 = (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad 4x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4}{4} = 1$

Derivando:

$\dfrac{df(x)}{dx} = 2x$

$\dfrac{dg(x)}{dx} = 2(x-2)$

Evaluando el punto $x = 1$:

$m_1 = 2x\big|_{x=1} = 2(1) = 2$

$m_2 = 2(x-2)\big|_{x=1} = 2(1-2) = 2(-1) = -2$

$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{2-(-2)}{1+(2)(-2)} = \tan^{-1}\dfrac{4}{-3} = \tan^{-1}(-1.3333) = -53.13°$

$\therefore \quad \theta = 53.13°$

4) $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = -6x^2 - 2x + 5$

Igualando las funciones:

$4x^2 + 5x - 7 = -6x^2 - 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 7x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 10, \quad b = 7, \quad c = -12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(10)(-12)}}{2(10)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{20} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{20} = \frac{-7 \pm 23}{20}$$

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{-7+23}{20} = \dfrac{16}{20} = 0.8; \quad x_2 = \dfrac{-7-23}{20} = -\dfrac{30}{20} = -1.5$

Derivando:

$\dfrac{df(x)}{dx} = 8x + 5$

$\dfrac{dg(x)}{dx} = -12x - 2$

Evaluando el punto $x_1 = 0.8$:

$m_1 = 8x + 5\big|_{x=0.8} = 8(0.8) + 5 = 6.4 + 5 = 11.4$

$m_2 = -12x - 2\big|_{x=0.8} = -12(0.8) - 2 = -9.6 - 2 = -11.6$

$\Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{11.4-(-11.6)}{1+(11.4)(-11.6)} = \tan^{-1}\dfrac{23}{-131.24} = \tan^{-1}(-0.1752) = -9.94°$

$\therefore \quad \theta_1 = 9.94°$

Evaluando el punto $x_2 = -1.5$:

$m_1 = 8x + 5\big|_{x=-1.5} = 8(-1.5) + 5 = -12 + 5 = -7$

$m_2 = -12x - 2\big|_{x=-1.5} = -12(-1.5) - 2 = 18 - 2 = 16$

$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}\dfrac{-7-16}{1+(-7)(16)} = \tan^{-1}\dfrac{-23}{-111} = \tan^{-1}(0.2072) = 11.70°$

5) $x^2+y^2-4x=0$ y $x^2+y^2-8=0$

Derivando:

Igualando las funciones: $x^2+y^2-4x=x^2+y^2-8 \Rightarrow -4x=-8 \Rightarrow x=\frac{-8}{-4}=2$ $\quad \frac{df(x)}{dx}=\frac{-2x+4}{2y}$

obteniendo las ordenadas: $y=\pm\sqrt{8-x^2}=\pm\sqrt{8-2^2}=\pm\sqrt{8-4}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$ $\quad \frac{dg(x)}{dx}=\frac{-2x}{2y}$

$\therefore \quad P_1(2,2); \quad P_2(2,-2)$

Evaluando el punto $(2,2)$:

$$m_1=\left.\frac{-2x+4}{2y}\right|_{(2,2)}=\frac{-2(2)+4}{2(2)}=\frac{0}{4}=0$$

$$m_2=\left.\frac{-2x}{2y}\right|_{(2,2)}=\frac{-2(2)}{2(2)}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$\therefore \quad \theta_1=\tan^{-1}\frac{0-(-1)}{1+0(-1)}=\tan^{-1}\frac{1}{1}=\tan^{-1}(1)=45^\circ$$

Evaluando el punto $(2,-2)$:

$$m_1=\left.\frac{-2x+4}{2y}\right|_{(2,-2)}=\frac{-2(2)+4}{2(-2)}=\frac{0}{-4}=0$$

$$m_2=\left.\frac{-2x}{2y}\right|_{(2,-2)}=\frac{-2(2)}{2(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$\therefore \quad \theta_1=\tan^{-1}\frac{0-1}{1+0(1)}=\tan^{-1}\frac{-1}{1}=\tan^{-1}(-1)=-45^\circ$$

Dadas las siguientes funciones obtener (en caso de aplicar):
a) puntos críticos, sus máximos y mínimos; b) ubicar donde son crecientes y donde decrecientes; c) determinar donde son cóncavas, donde convexas y establecer sus puntos de inflexión; d) trazar la gráfica en el intervalo dado.

1) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ en el intervalo $0 \leq x \leq 5$

$$\frac{df(x)}{dx} = -2x + 6$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$f(3) = -(3)^2 + 6(3) + 7 = -9 + 18 + 7 = 16$$

$$\therefore \quad PC(3,16)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$ por lo tanto es un máximo y su forma es convexa. Eso implica que en $0 \leq x < 3$, la función es creciente y en $3 < x \leq 5$ es decreciente.

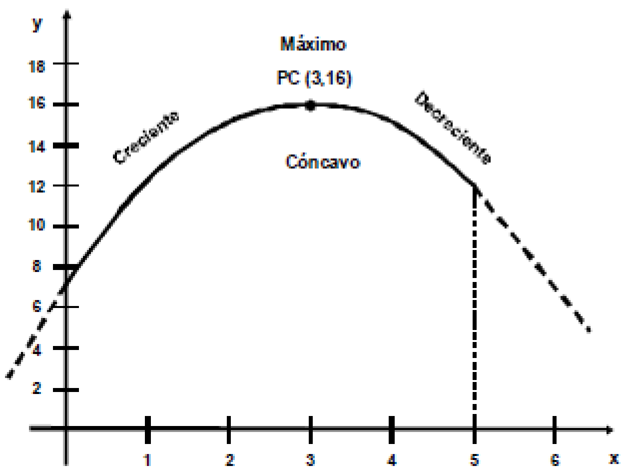
$\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$, por lo tanto, no existen puntos de inflexión.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(0) = -(0)^2 + 6(0) + 7 = 0 + 0 + 7 = 7 \quad \Rightarrow \quad P(0,7)$$

$$f(5) = -(5)^2 + 6(5) + 7 = -25 + 30 + 7 = 12 \quad \Rightarrow \quad P(5,12)$$

Trazando la gráfica:



2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 6x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(3x - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad 3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 0 - 0 + 4 = 4$$

$$\therefore \quad PC_1(0,4)$$

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

$$\therefore \quad PC_2(2,0)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-6$$

$$6x-6\Big|_{x=0}=6(0)-6=-6<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$$6x-6\Big|_{x=2}=6(2)-6=12-6=6>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-2\le x<0$, la función es creciente, en $0<x\le 2$ es decreciente y en $2<x\le 4$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$6x-6=0 \quad\Rightarrow\quad 6x=6 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{6}{6}=1$$

$$f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2$$

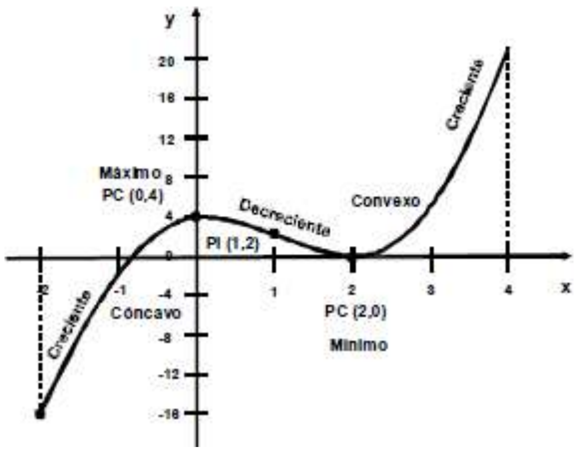
$$\therefore \quad PI(1,2)$$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2+4=-8-12+4=-16$$

$$f(4)=(4)^3-3(4)^2+4=64-48+4=20$$

Trazando la gráfica:



3) $f(x)=x^4-2x^2+1$ en el intervalo $-1.5\le x\le 1.5$

$$\frac{df(x)}{dx}=4x^3-4x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$4x^3-4x=0 \quad\Rightarrow\quad x(4x^2-4)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0;\quad 4x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}$$

$$\therefore \quad x_2=1;\quad x_3=-1$$

$$f(0)=(0)^4-2(0)^2+1=0-0+1=1$$

$$\therefore \quad PC_1(0,1)$$

$$f(1)=(1)^4-2(1)^2+1=1-2+1=0$$

$$\therefore \quad PC_2(1,0)$$

$$f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+1=1-2+1=0$$

$$\therefore \quad PC_3(-1,0)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-4$$

$$12x^2-4\Big|_{x=0}=12(0)^2-4=-4<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$$12x^2-4\Big|_{x=1}=12(1)^2-4=12-4=8>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$$12x^2-4\Big|_{x=-1}=12(-1)^2-4=12-4=8>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-1.5\le x<-1$, la función es decreciente, en $-1<x<0$ es creciente, en $0<x<1$ es decreciente y en $1<x\le 1.5$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$12x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad 12x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x_2=0.5773; \quad x_3=-0.5773$$

$$f(0.5773)=(0.5773)^4-2(0.5773)^2+1=0.1111-0.6666+1=0.4444$$

$$\therefore \quad PI_1(0.5773, 0.4444)$$

$$f(-0.5773)=(-0.5773)^4-2(-0.5773)^2+1=0.1111-0.6666+1=0.4444$$

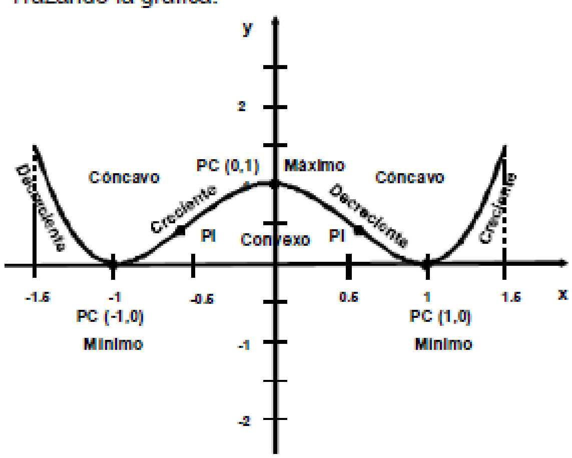
$$\therefore \quad PI_2(-0.5773, 0.4444)$$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-1.5)=(-1.5)^4-2(-1.5)^2+1=5.0625-4.5+1=1.5625$$

$$f(1.5)=(1.5)^4-2(1.5)^2+1=5.0625-4.5+1=1.5625$$

Trazando la gráfica:



4) $f(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ en el intervalo $-1\le x\le 5$

$$\frac{df(x)}{dx}=-3x^2+12x-9$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-3x^2+12x-9=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-12x+9=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+3=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore \quad x_1=1; \quad x_2=3$$

$$f(1)=-(1)^3+6(1)^2-9(1)+8=-1+6-9+8=4$$

$$\therefore \quad PC_1(1,4)$$

$$f(3)=-(3)^3+6(3)^2-9(3)+8=-27+54-27+8=8$$

$$\therefore \quad PC_2(3,8)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 12$$

$$-6x + 12\Big|_{x=1} = -6(1) + 12 = -6 + 12 = 6 > 0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$$-6x + 12\Big|_{x=3} = -6(3) + 12 = -18 + 12 = -6 \ > 0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

Eso implica que en $-1 \le x < 1$, la función es decreciente, en $1 < x \le 3$ es creciente y en $3 < x \le 5$ es decreciente.

$\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, por lo tanto, si existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$-6x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$f(2) = -(2)^3 + 6(2)^2 - 9(2) + 8 = -8 + 24 - 18 + 8 = 6$$

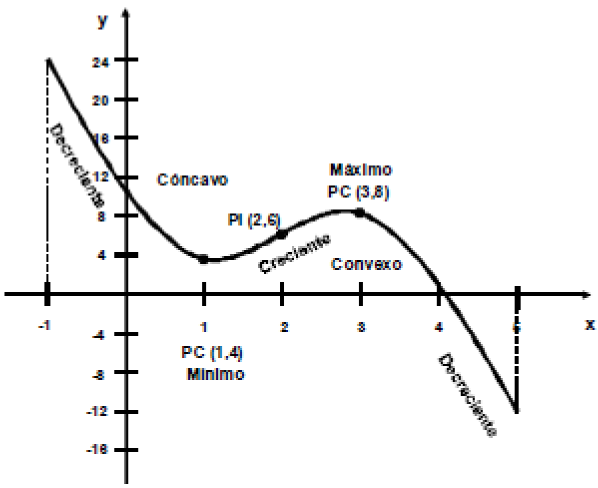
$$\therefore \quad PI(2,6)$$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-1) = -(-1)^3 + 6(-1)^2 - 9(-1) + 8 = 1 + 6 + 9 + 8 = 24$$

$$f(5) = -(5)^3 + 6(5)^2 - 9(5) + 8 = -125 + 150 - 45 + 8 = -12$$

Trazando la gráfica:



5) $f(x) = x^3 + 3x$ en el intervalo $-3 \le x \le 3$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 3$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{3}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

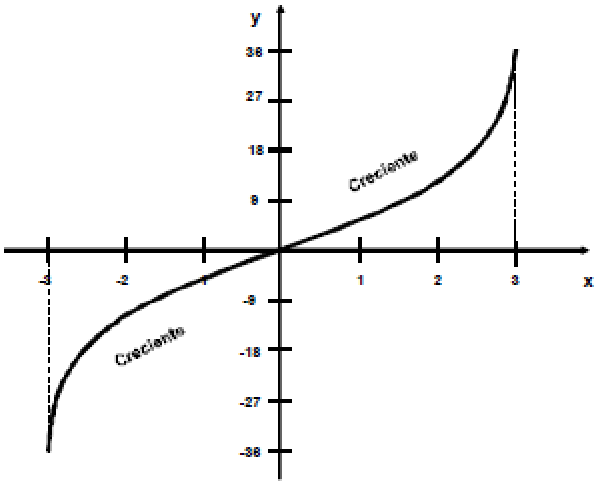
Como no está definido ese valor en los número reales, no se tienen puntos críticos. Eso significa que no hay ni máximos ni mínimos.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) = -27 - 9 = -36$$

$$f(3) = (3)^3 + 3(3) = 27 + 9 = 36$$

En la siguiente gráfica, se muestra que la función siempre es creciente:



Sea la función $x(t) = t^3 - 3t^2 + 10t + 8$ que define la trayectoria, en metros, de una partícula. Si $t_1 = 5\ s$ y $t_2 = 8\ s$. Determinar: a) su posición para t_1, b) su posición para t_2, c) su velocidad media entre t_1 y t_2, d) la velocidad instantánea para $t = 6\ s$, e) la aceleración media entre t_1 y t_2, f) la aceleración instantánea para $t = 7\ s$.

a) $x(5) = (5)^3 - 3(5)^2 + 10(5) + 8 = 125 - 75 + 50 + 8 = 108\ m$

b) $x(8) = (8)^3 - 3(8)^2 + 10(8) + 8 = 512 - 192 + 80 + 8 = 408\ m$

c) $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{408 - 108}{8 - 5} = \dfrac{300}{3} = 100\ \dfrac{m}{s}$

d) $v_i = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=6} = 3(6)^2 - 6(6) + 10 = 108 - 36 + 10 = 82\ \dfrac{m}{s}$

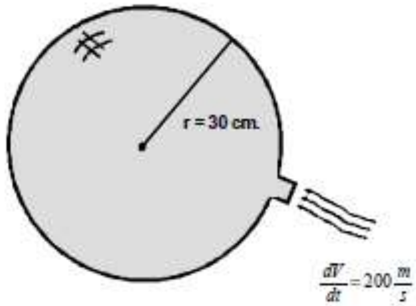
e) $v_1 = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=5} = 3(5)^2 - 6(5) + 10 = 75 - 30 + 10 = 55\ \dfrac{m}{s}$

$v_2 = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=8} = 3(8)^2 - 6(8) + 10 = 192 - 48 + 10 = 154\ \dfrac{m}{s}$

$\therefore\quad a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{154 - 55}{8 - 5} = \dfrac{99}{3} = 33\ \dfrac{m}{s^2}$

f) $a_i = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 6\Big|_{t=7} = 6(7) - 6 = 42 - 6 = 36\ \dfrac{m}{s^2}$

1) A un globo esférico se le bombea aire de forma que su volumen aumenta a razón de $200\dfrac{cm^3}{s}$, ¿con qué rapidez crece el radio del globo cuando su diámetro es de $30\,cm$?



Interpretando los datos: $\dfrac{dV}{dt} = 200\dfrac{cm^3}{s}$, $D = 30\,cm \quad \Rightarrow \quad r = 15cm$

El volumen de un globo es: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Derivando: $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{12}{3}\pi r^2 = 4\pi r^2$

La razón buscada es: $\dfrac{dr}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

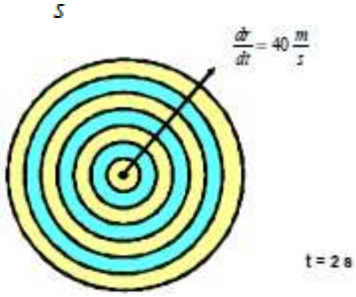
Sustituyendo:

$$200\frac{cm^3}{s} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

despejando $\dfrac{dr}{dt}$ y sustituyendo r:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{200\frac{cm^3}{s}}{4\pi(15\,cm)^2} = 0.0707\frac{cm}{s}.$$

2) Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que se desplaza con una velocidad de $40\dfrac{cm}{s}$. Hallar la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de 2 segundos.



Interpretando los datos: $\dfrac{dr}{dt} = 40\dfrac{cm}{s}$, $t_1 = 2\,s$

El área de un circunferencia es: $A = \pi r^2$

Derivando: $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$

La razón buscada es: $\dfrac{dA}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

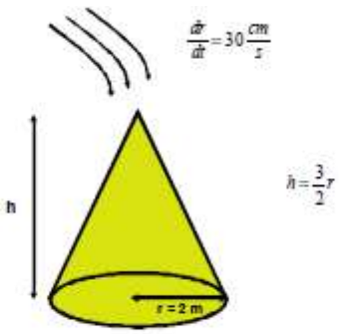
Para $t = 2\ s$:

$$r = 40\,\frac{cm}{s}(2\ s) = 80\ cm$$

Sustituyendo:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(0.80\ m)\left(0.40\,\frac{m}{s}\right) = 2.0106\,\frac{m^2}{s}.$$

3) En una construcción, un camión vierte arena y se forma un montículo de forma cónica, cuya altura es igual a los $\frac{3}{2}$ del radio de la base. Obtener el incremento del volumen por unidad de tiempo cuando el radio de la base es igual a 2 metros, sabiendo que el radio se incrementa a razón de 30 centímetros. cada segundo.



Interpretando los datos: $h = \frac{3}{2}r$,

$r_1 = 30$, $\frac{dr}{dt} = 30\,\frac{cm}{s}$

El volumen de un cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{1}{2}\pi r^3$$

Derivando: $\frac{dV}{dr} = \frac{3}{2}\pi r^2$

La razón buscada es: $\frac{dV}{dt}$

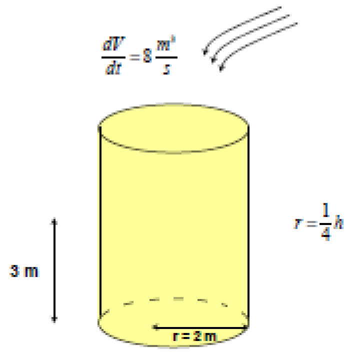
Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

sustituyendo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}\pi(2)^2(0.30) = 5.6548\,\frac{m^3}{s}$$

4) Se vierte gasolina en un tanque cilíndrico a razón de $8\dfrac{m}{s}$. Si el radio es la cuarta parte de la altura, ¿a qué velocidad sube el nivel de gasolina cuando $h = 3\ m$?



Interpretando los datos: $\dfrac{dV}{dt} = 8\ \dfrac{m}{s}$, $r = \dfrac{h}{4}$, $h = 3\ m$

El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{1}{16}\pi h^3$$

Derivando: $\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{3}{16}\pi h^2$

La razón buscada es: $\dfrac{dh}{dt}$

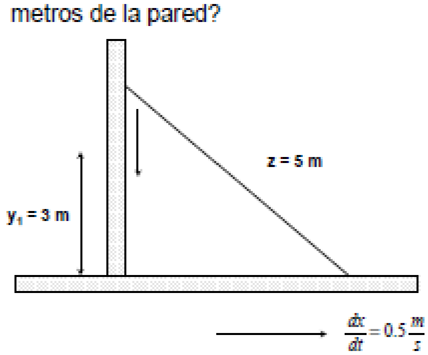
Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

despejando $\dfrac{dh}{dt}$ y sustituyendo:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{\frac{3}{16}\pi(3)^2} = 1.5090\ \frac{m}{s}$$

5) Una escalera de 5 metros de largo está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de 0.5 $\dfrac{m}{s}$, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior cuando este extremo está a 3
metros de la pared?



Interpretando los datos: $z = 5\ m$,

$\dfrac{dx}{dt} = 0.5\dfrac{cm}{s}$, $y_1 = 3$

La razón buscada es: $\dfrac{dy}{dt}$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Derivando con respecto a t:

$$2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(25)=0$$

Despejando $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2y}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}=$$

Obteniendo x cuando $y_1=3$

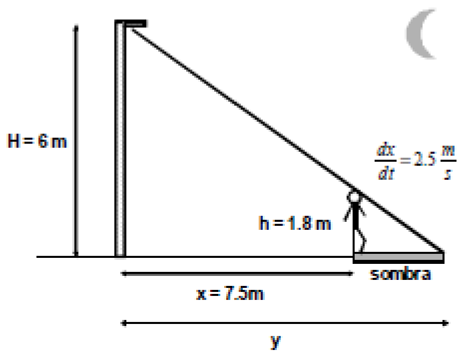
$$x=\sqrt{25-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4\ m$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{4}{3}(0.5)=-0.66\ \frac{m}{s}$$

el signo negativo significa que la escalera pierde altura.

6) Una persona de 1.8 metros de estatura camina en la noche en línea recta a una velocidad de 2.5 $\frac{m}{s}$.

Si pasa a junto a un arbotante de 6 metros de altura, obtener la velocidad del extremo de la sombra que se genera sobre la calle después de 3 segundos.



Interpretando los datos:

$$\frac{dx}{dt}=2.5\ \frac{m}{s},\quad H=6\ m,\quad h=1.8\ m,\ t=3\ s$$

$$x=2.5\ \frac{m}{s}(3\ s)=7.5\ m$$

La razón buscada es: $\frac{dy}{dt}$

Aplicando el concepto de semejanza de triángulos:

$$\frac{H}{y}=\frac{h}{y-x}$$

Despejando y:

$$y-x=\frac{h}{H}y\quad\Rightarrow\quad y-\frac{h}{H}y=x\quad\Rightarrow\quad y\left(1-\frac{h}{H}\right)=x\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x}{1-\frac{h}{H}}$$

Derivando con respecto a t:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}}{1-\frac{h}{H}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{7.5\ m}{1-\frac{1.8\ m}{6\ m}}=10.71\ \frac{m}{s}$$

1) Encontrar dos números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Sea x un número y $20-x$ el otro.

$$P = x(20-x) = 20x - x^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 20 - 2x$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2 \quad \text{(por lo tanto, es máximo)}$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-20}{-2} = 10$$

$$20 - x = 20 - 10 = 10$$

Los números buscados son $10 \; y \; 10$.

2) Hallar dos números diferentes cuyo producto sea 16 y la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima.

$$xy = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{x}$$

$$S = x + y^2 = x + \left(\frac{16}{x}\right)^2 = x + \frac{256}{x^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{512}{x^3}$$

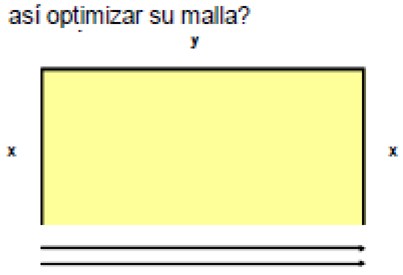
$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1536}{x^4} \quad \text{(por lo tanto, es mínimo)}$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{512}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{512}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^3 = 512 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{512} = 8$$

$$y = \frac{16}{x} = \frac{16}{8} = 2$$

Los números buscados son $8 \; y \; 2$.

3) Una persona posee 2400 metros de malla y desea cercar un terreno rectangular que está sobre un río. Si no necesita cercar al río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que posee el área más grande para así optimizar su malla?



Solución.

$$Área = xy$$

$$Longitud = 2x + y = 2400$$

$$y = 2400 - 2x$$

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 2400 - 4x$$

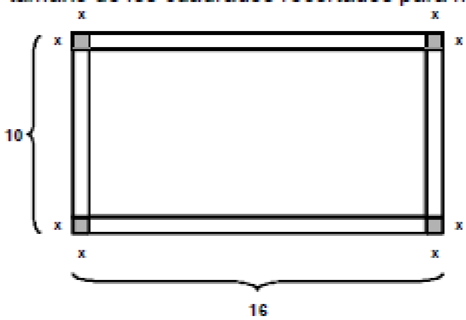
$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 \quad \text{(por lo tanto, es máximo)}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2400 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x = -2400 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2400}{-4} = 600$$

$$y = 2400 - 2x = 2400 - 2(600) = 2400 - 1200 = 1200$$

Las dimensiones de la malla deben ser: $600\,m$ de profundidad y $1200\,m$ de ancho.

4) Se desea construir una caja rectangular de cartón sin tapa. Si a un cartón de 10 x 16 cm se le hace una corte cuadrado en cada esquina y se doblan los bordes por las líneas punteadas. Cuál debe se el tamaño de los cuadrados recortados para maximizar el volumen?



La longitud de la base es: $16-2x$

La anchura de la base es: $10-2x$

La altura de la caja es: x

$$
\begin{aligned}
Volumen &= (16-2x)(10-2x)x \\
&= \left(160-32x-20x+4x^2\right)x \\
&= 160x-32x^2-20x^2+4x^3
\end{aligned}
$$

$$V = 4x^3-52x^2+160x$$

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2-104x+160$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2-104x+160=0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-(-104)\pm\sqrt{104^2-4(12)(160)}}{2(12)} = \frac{104\pm 56}{24}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{160}{24} = 6.66; \quad x_2 = \frac{48}{24} = 2$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x-104$$

$$24x-104\Big|_{x=6.66} = 24(6.66)-104 = 160-104 = 56 > 0$$

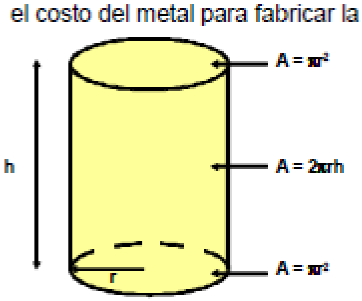
por lo tanto es un mínimo.

$$24x-104\Big|_{x=2} = 24(2)-104 = 48-104 = -56 < 0$$

por lo tanto es un máximo.

Se toma el valor que es máximo, es decir, los cuadrados recortados para maximizar el volumen deben medir $2\ cm$.

5) Se desea producir una lata que contenga un litro de leche. Determinar las dimensiones que minimizan el costo del metal para fabricar la lata.



El área total de la lata es igual a la suma de las áreas de la base, la tapa y los lados:

$$Área = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$Volumen = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

sustituyendo en el área:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2000}{4\pi}} = 5.41\,cm$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(5.41)^2} = 10.82\,cm$$

$$4\pi + \frac{4000}{r^3}\bigg|_{x=5.41} = 4\pi + \frac{4000}{5.41^3} = 12.56 + 25.13 = 37.69 > 0$$ (por lo tanto, es mínimo)

La lata debe tener: $5.41\,cm$ de radio y $10.82\,cm$ de altura (es decir $2r$).

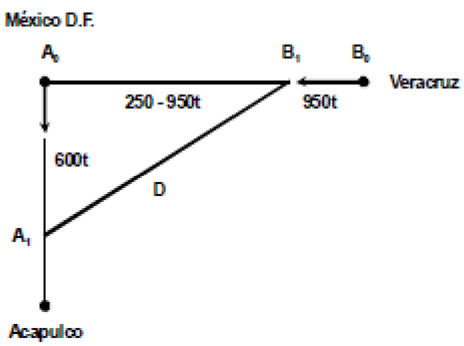
6) Cuando un avión que viene del puerto de Veracruz desplazándose a velocidad constante de $950\,\frac{km}{hr}$ y está a $250\,km$ de la ciudad de México, otro avión sale de la ciudad de México rumbo a Acapulco con velocidad constante de $600\,\frac{km}{hr}$. Si las trayectorias son perpendiculares, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima.

La posición del avión que viene de Veracruz en el instante inicial es A_0

La posición del avión que va a Acapulco en el instante inicial es B_0

La posición del avión que viene de Veracruz t horas más tarde es A_1

La posición del avión que va a Acapulco t horas más tarde es B_1



Aplicando el teorema de Pitágoras y sabiendo que $distancia = velocidad \cdot tiempo$, la distancia D entre los aviones es:

$$D^2 = (600t)^2 + (250 - 950t)^2$$

derivando implícitamente con respecto a t:

$$2D\frac{dD}{dt}=2(600t)600+2(250-950t)(-950)=720{,}000t-475{,}000+1'805{,}000t$$

$$2D\frac{dD}{dt}=2'525{,}000t-475{,}000$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dD}{dt}=\frac{2'525{,}000t-475{,}000}{2D}=\frac{1'262{,}500t-237{,}500}{D}$$

$$\frac{dD}{dt}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{1'262{,}500t-237{,}500}{D}=0\quad\Rightarrow\quad 1'262{,}500t-237{,}500=0$$

$$t=\frac{237{,}500}{1'262{,}500}=0.188\,hrs\approx 11.28\min$$

$$\left.\frac{1'262{,}500t-237{,}500}{D}\right|_{t=0}=\frac{1'262{,}500(0)-237{,}500}{D}=-\frac{237{,}500}{D}$$

$$\left.\frac{1'262{,}500t-237{,}500}{D}\right|_{t=1}=\frac{1'262{,}500(1)-237{,}500}{D}=\frac{1'025{,}000}{D}$$

como D siempre es positiva, la función pasa de decreciente a creciente, por lo tanto es un mínimo.
El tiempo que transcurre para que la distancia sea mínima es de aproximadamente $11\min$.
sustituyendo:

$$D^2=(600(0.188))^2+(250-950(0.188))^2=12{,}723.84+5{,}097.96=17{,}821.80$$

$$D=\sqrt{17{,}821.80}=133.49\,km.$$

Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hopital:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

sustituyendo:

$$\frac{(2)^2+2-6}{(2)^2-4}=\frac{4+2-6}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}(x^2+x-6)}{\frac{d}{dx}(x^2-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{2x}=\frac{2(2)+1}{2(2)}=\frac{5}{4}$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}$

sustituyendo:

$$\frac{5(\infty)^2+8(\infty)+3}{(\infty)^2+7}=\frac{\infty+\infty+3}{\infty+7}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(5x^2+8x+3)}{\frac{d}{dx}(x^2+7)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+8}{2x}=\frac{10(\infty)+8}{2(\infty)}=\frac{\infty+8}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(10x+8)}{\frac{d}{dx}(2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{2}=5$$

3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$

sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2)^3-(2)^2-(2)-2}{(2)^3-3(2)^2+3(2)-2}=\frac{8-4-2-2}{8-12+6-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3-x^2-x-2\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^3-3x^2+3x-2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$$

$$=\frac{3(2)^2-2(2)-1}{3(2)^2-6(2)+3}=\frac{12-4-1}{12-12+3}=\frac{7}{3}$$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}$

sustituyendo:

$$\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(sen\,x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+sen\,3x}{x-sen\,3x}$

sustituyendo:

$$\frac{0+sen\,3(0)}{0-sen\,3(0)}=\frac{0+0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+sen\,3x}{x-sen\,3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x+sen\,3x)}{\frac{d}{dx}(x-sen\,3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3\cos 3x}{1-3\cos 3x}=\frac{1+3(1)}{1-3(1)}=\frac{1+3}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2$$

6) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

sustituyendo:

$$\frac{\ln(1)}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

7) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

sustituyendo:

$$\frac{\ln(\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}$

sustituyendo:

$$\frac{3^4-81}{3^2-9}=\frac{81-81}{9-9}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^4-81\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2-9\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{2x}=\frac{4(3)^3}{2(3)}=\frac{4(27)}{6}=\frac{108}{6}=18$$

9) $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}$

el limite puede rescribirse como:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}$$

sustituyendo:

$$\frac{\infty^2}{e^{(\infty)^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\frac{2(\infty)}{2(\infty)e^{(\infty)^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}\left(2xe^{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x\left(2xe^{x^2}\right)+e^{x^2}(2)}=\frac{2}{2(\infty)\left(2(\infty)e^{(\infty)^2}\right)+e^{(\infty)^2}(2)}=\frac{2}{\infty+\infty}=0$$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

sustituyendo:

$$\frac{\tan(0)-0}{0^3}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\tan x-x)}{\frac{d}{dx}\left(x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sec^2 x-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\tan x}{6x}=\frac{2(1)^2(0)}{6(0)}=\frac{0}{0}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(2\sec^2 x\cdot\tan x\right)}{\frac{d}{dx}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\sec^2 x+\tan x\left(4\sec^2 x\cdot\tan x\right)}{6}$$

$$=\frac{2(1)^2(1)^2+0(4(1)(1))}{6}=\frac{2+0}{6}=\frac{2}{6}$$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}$

sustituyendo:

$$\frac{5e^{4(\infty)}}{4(\infty)^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(5e^{4x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(4x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{20e^{4x}}{8x}=\frac{20e^{4(\infty)}}{8(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(20e^{4x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(8x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{80e^{4x}}{8}=\frac{80e^{4(\infty)}}{8}=\frac{\infty}{8}=\infty$$

en este ejemplo se demuestra que no todos los límites existen a pesar de la aplicación de esta regla.

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

sustituyendo: $\frac{\ln(\infty)}{\frac{1}{\infty}}=\frac{\infty}{0}$. No aplica la regla de L'Hopital.

Obtener la diferencial dy de la función $y=4x^2-6x+5$.

$dy=(8x-6)dx$

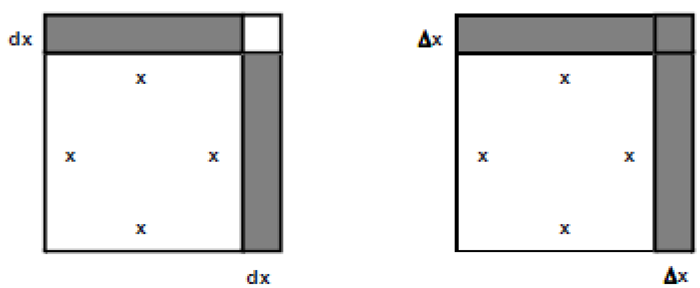
Sea $y=x^2$, comprobar que $dy\neq\Delta y$.

Obteniendo la diferencial de y: $dy=2x\cdot dx$

Obteniendo el incremento de y: $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$

Comparando ambos resultados, se observa como $dy\neq\Delta y$

Si se traza una figura, lo anterior se comprueba:



$dy = 2x\cdot dx \quad \neq \quad \Delta y = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$

Obtener la diferencial dy de las siguientes funciones:

1) $y=-4x^3+10x^2-5x+7$

$dy=\left(-12x^2+20x-5\right)dx$

2) $y=\frac{9}{x^3}$

$y=9x^{-3}$

$dy=-27x^{-4}\,dx=-\frac{27}{x^4}dx$

3) $y=\sqrt[4]{\left(8x^3\right)^7}$

$y=\left(8x^3\right)^{\frac{7}{4}}$

$dy=\frac{7}{4}\left(8x^3\right)^{\frac{3}{4}}\left(24x^2\right)dx=42x^2\sqrt[4]{8x^3}\,dx$

4) $y=4sen\,5x^3$

$dy=4\left(15x^2\right)\cos 5x^3\,dx=60x^2\cos 5x^3\,dx$

5) $y=6x^2e^{4x}$

$dy=\left(6x^2\left(4e^{4x}\right)+e^{4x}(12x)\right)dx$

6) $y=7\cos^{-1}9x$

$dy=-\frac{7(9)}{\sqrt{1-(9x)^2}}dx=-\frac{63}{\sqrt{1-81x^2}}dx$

7) $y=\ln\left(12x^5\right)^8$

$y=8\ln 12x^5$

$dy=\frac{8\left(60x^4\right)}{12x^5}dx=\frac{40}{x}dx$

8) $y=\frac{6}{\sqrt{11x^4}}$

$y=6\left(11x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$

$dy=-\frac{6}{2}\left(11x^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(44x^3\right)dx=-\frac{132x^3}{\sqrt{\left(11x^4\right)^3}}dx$

9) $y=5x\tan\left(\tan^{-1}4x\right)$

$y=5x(4x)=20x^2$

$dy=40x\,dx$

10) $y=2\csc^5 4x^3$

$dy=-2\left(12x^2\right)\left(5\csc^4 4x^3\right)\csc 4x^3\cot 4x^3\,dx=-120x^2\csc^5 4x^3\cot 4x^3\,dx$

11) $y=\frac{5x^3+8x^2-2}{-x^4-6x}$

$dy=\frac{\left(-x^4-6x\right)\left(15x^2+16x\right)-\left(5x^3+8x^2-2\right)\left(-4x^3-6\right)}{\left(-x^4-6x\right)^2}dx$

12) $7xy+6x-2y^2-5y^6+4x^3-18=0$

$dy=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx=\frac{-7y-6-12x^2}{7x-4y-30y^5}dx$

13) $y=\frac{8}{9-2x^3}$

$y=8\left(9-2x^3\right)^{-1}$

$dy=-8\left(9-2x^3\right)^{-2}\left(-6x^2\right)dx=\frac{48x^2}{\left(9-2x^3\right)^2}dx$

14) $y=\log_5\left(13x^3-2\right)$

$dy=\frac{5\left(39x^2\right)}{\left(13x^3-2\right)}\log_5 e\,dx=\frac{195}{13x^3-2}\log_5 e\,dx$

15) $y=7^{9x^2}$

$dy=(18x)7^{9x^2}\ln 9x^2dx$

Obtener d^4y de la función $y=\frac{1}{x}$

Considerando que $y=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$, se aplica de forma reiterada:

$dy=-\frac{2}{x^2}dx$; $d^2y=\frac{4}{x^3}dx^2$; $d^3y=-\frac{12}{x^4}dx^3$; $d^4y=\frac{48}{x^5}dx^4$

Obtener d^5y de la función $y=sen\,2x$

$dy=2\cos 2x\,dx$; $d^2y=-4sen\,2x\,dx^2$; $d^3y=-8\cos 2x\,dx^3$;

$d^4y=16sen\,2x\,dx^4$; $d^5y=32\cos 2x\,dx^5$

Dadas las siguientes funciones, obtener $\Delta x, dx, \Delta y, dy$ y el $\%\,e$, si x se modifica de acuerdo a los valores indicados:

1) $y=x^2-3x-2$, si x pasa de 1 a 1.1

$\Delta x=x_2-x_1=1.1-1=0.1$

$dx=\Delta x=0.1$

$\Delta y=y_2-y_1=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)-2-\left(x^2-3x-2\right)$

$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-3x-3\Delta x-2-x^2+3x+2=2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x$

Sustituyendo $x=1, \Delta x=0.1$:

$\Delta y=2(1)(0.1)+(0.1)^2-3(0.1)=0.2+0.01-0.3=-0.09$

Ahora, diferenciando la función: $dy=(2x-3)dx$

Sustituyendo $x=1, dx=0.1$:

$dy=(2(1)-3)(0.1)=-0.1$

Calculando el error:

$\%\,e=\left|\frac{-0.09-(-0.1)}{-0.09}\right|\cdot 100=11.11\%>5\%$

error que se considera alto.

2) $y=4x^2-2x$, si x pasa de: a) 2 a 2.5, b) 2 a 2.1, c) 2 a 2.01

a) $\Delta x=x_2-x_1=2.5-2=0.5$

$dx=\Delta x=0.5$

$\Delta y=y_2-y_1=4(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-\left(4x^2-2x\right)$

$=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-2x-2\Delta x-4x^2+2x=8x\Delta x+4(\Delta x)^2-2\Delta x$

Sustituyendo $x=2, \Delta x=0.5$:

$\Delta y=8(2)(0.5)+4(0.5)^2-2(0.5)=8+1-1=8$

Ahora, diferenciando la función: $dy = (8x-2)dx$

Sustituyendo $x = 2, dx = 0.5$:

$dy = (8(2)-2)(0.5) = 7$

Calculando el error:

$$\% e = \left|\frac{8-7}{8}\right| \cdot 100 = 12.5\,\% > 5\%$$

error que se considera alto.

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.1 - 2 = 0.1$

$dx = \Delta x = 0.1$

$\Delta y = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$

Sustituyendo $x = 2, \Delta x = 0.1$:

$\Delta y = 8(2)(0.1) + 4(0.1)^2 - 2(0.1) = 1.6 + 0.04 - 0.2 = 1.44$

$dy = (8x-2)dx$

Sustituyendo $x = 2, dx = 0.1$:

$dy = (8(2)-2)(0.1) = 1.4$

Calculando el error:

$$\% e = \left|\frac{1.44-1.4}{1.44}\right| \cdot 100 = 2.77\,\% < 3\%$$

error que se considera muy aceptable.

c) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.01 - 2 = 0.01$

$dx = \Delta x = 0.01$

$\Delta y = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$

Sustituyendo $x = 2, \Delta x = 0.01$:

$\Delta y = 8(2)(0.01) + 4(0.01)^2 - 2(0.01) = 0.16 + 0.0004 - 0.02 = 0.1404$

$dy = (8x-2)dx$

Sustituyendo $x = 2, dx = 0.01$:

$dy = (8(2)-2)(0.01) = 0.14$

Calculando el error:

$$\% e = \left|\frac{0.1404-0.14}{0.1404}\right| \cdot 100 = 0.284\,\% < 3\%$$

error que se considera muy aceptable.

Aplicando el concepto de diferencial, hacer el cálculo aproximado de los siguientes valores:

1) $\sqrt{26}$

Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1 = \sqrt{25} = 5\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 25, x_2 = 26$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 26 - 25 = 1$

se modela el valor como función: $y = \sqrt{x}$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{25}}(1) = \dfrac{1}{10} = 0.1$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 5 + 0.1 = 5.1$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt{26} \cong 5.1$

2) $\sqrt[3]{66}$

Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1 = \sqrt[3]{64} = 4\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 64, x_2 = 66$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 66 - 64 = 2$

se modela el valor como función: $y = \sqrt[3]{x}$

$\therefore \quad dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}(2) = \dfrac{2}{48} = 0.041666$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 4 + 0.041666 = 4.041666$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt[3]{66} \cong 4.041666$

3) $\sqrt[5]{31}$

Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1 = \sqrt[5]{32} = 2\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 32, x_2 = 31$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 31 - 32 = -1$

se modela el valor como función: $y = \sqrt[5]{x}$

$\therefore \quad dy = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} dx$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}(-1) = -\dfrac{1}{80} = -0.0125$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 2 + (-0.0125) = 1.9875$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt[5]{31} \cong 1.9875$

4) 3.05^2

Se elige el valor x_1 del cuadrado más cercano $\left(y_1 = 3^2 = 9\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 3, x_2 = 3.05$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 3.05 - 3 = 0.05$

se modela el valor como función: $y = x^2$

$\therefore \quad dy = 2x\,dx$

sustituyendo: $dy = 2(3)(0.05) = 0.3$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 9 + 0.3 = 9.3$

Por tanto, se puede concluir que $3.05^2 \cong 9.3$

5) 10.2^3

Se elige el valor x_1 del cubo más cercano $\left(y_1 = 10^3 = 1000\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 10, x_2 = 10.2$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 10.2 - 10 = 0.2$

se modela el valor como función: $y = x^3$

$\therefore \quad dy = 3x^2\,dx$

sustituyendo: $dy = 3(10)^2(0.2) = 60$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1000 + 60 = 1060$

Por tanto, se puede concluir que $10.2^3 \cong 1060$

6) $\log_{10} 10{,}007$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 4 + 0.000304 = 4.000304$

Por tanto, se puede concluir que $\log_{10} 10{,}007 \cong 4.000304$

Se elige el valor x_1 del logaritmo natural más cercano $(y_1 = \ln e = 1)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = e = 2.718281,\ x_2 = 2.7$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 2.7 - 2.718281 = -0.018281$

se modela el valor como función: $y = \ln x$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{e}(-0.018281) = -0.006725$

7) $\ln 2.7$

Se elige el valor x_1 del logaritmo más cercano $(y_1 = \log_{10} 10{,}000 = 4)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 10{,}000,\ x_2 = 10{,}007$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 10{,}007 - 10{,}000 = 7$

se modela el valor como función: $y = \log_{10} x$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{x} \log_{10} e\, dx$$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{10{,}000}(0.434294)(7) = 0.000304$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1 - 0.006725 = 0.993274$

Por tanto, se puede concluir que $\ln 2.7 \cong 0.993274$

Para encontrar valores aproximados de funciones trigonométricas, conviene recordar la siguiente tabla:

	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	No definido	1	No definido
30°	0.5	0.8660	0.5773	1.7320	1.1547	2
45°	0.7071	0.7071	1	1	1.4142	1.4142
60°	0.8660	0.5	1.7320	0.5773	2	1.1547
90°	1	0	No definido	0	No definido	1

8) $\cos 62°$

Se elige como x_1 al valor del coseno más cercano $(y_1 = \cos 60° = 0.5)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 60°,\ x_2 = 62°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 62° - 60° = 2°$

transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow 2\pi\ rad \\ 2° \rightarrow \Delta x\ rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\ rad)(2°)}{360°} = 0.034906\ rad$$

se modela el valor como función: $y = \cos x$

$\therefore \quad dy = -sen\, x\, dx$

sustituyendo: $dy = -0.8660(0.034906) = -0.030228$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 0.5 + (-0.030228) = 0.469771$

Por tanto, se puede concluir que $\cos 62° \cong 0.469771$

9) $sen\,3°$

Se elige como x_1 al valor del seno más cercano $(y_1 = sen\,0° = 0)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 0°, x_2 = 3°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 3° - 0° = 3°$

transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \to 2\pi\, rad \\ 3° \to \Delta x\, rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\, rad)(3°)}{360°} = 0.052359\, rad$$

se modela el valor como función: $y = sen\,x \quad \therefore \quad dy = \cos x\, dx$

sustituyendo: $dy = 1(0.052359) = 0.052359$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 0 + (0.052359) = 0.052359$

Por tanto, se puede concluir que $sen\,3° \cong 0.052359$

10) $\tan 44°$

Se elige como x_1 al valor de la tangente más cercana $(y_1 = \tan 45° = 1)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 45°, x_2 = 44°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 44° - 45° = -1°$

transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \to 2\pi\, rad \\ -1° \to \Delta x\, rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\, rad)(-1°)}{360°} = -0.017453\, rad$$

se modela el valor como función: $y = \tan x$

$\therefore \quad dy = \sec^2 x\, dx$

sustituyendo: $dy = (1.4142)^2(-0.017453) = -0.034906$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1 + (-0.034906) = 0.965094$

Por tanto, se puede concluir que $\tan 44° \cong 0.965094$

Un móvil se mueve según la función $s = 5t^2 + t$, donde s representa la distancia recorrida medida en metros y t el tiempo medido en segundos. Determinar el desplazamiento que experimenta el móvil en el tiempo comprendido entre 7 segundos y $\left(7 + \frac{1}{3}\right)$ segundos.

$t_1 = 7,\ t_2 = 7.333333$

$\Rightarrow \quad \Delta t = dt = t_2 - t_1 = 7.333333 - 7 = 0.333333\, s$

diferenciando la función: $ds = (10t + 1)dt$

sustituyendo: $ds = (10(7) + 1)(0.333333) = 23.666666\, m$

en realidad recorre algo más de esa distancia, ya que:

$s = 5(7.333333)^2 + 7.333333 - (5(7^2) + 7) = 24.222222\, m$

por lo que se ha cometido un error de 0.555 centímetros.

En la sucesión: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots\right\}$, el término enésimo o general es: $a_n = \left\{\frac{n}{2}\right\}$.

Para conocer los términos de una sucesión, se sustituye el valor de n desde 1 hasta el valor que se desee.

Determinar los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones:

1) $a_n = \left\{ \dfrac{2^n}{2n-1} \right\}$

el primer término es: $\dfrac{2^1}{2(1)-1} = 2$

el segundo término es: $\dfrac{2^2}{2(2)-1} = \dfrac{4}{3}$

el tercer término es: $\dfrac{2^3}{2(3)-1} = \dfrac{8}{5}$

el cuarto término es: $\dfrac{2^4}{2(4)-1} = \dfrac{16}{7}$

el quinto término es: $\dfrac{2^5}{2(5)-1} = \dfrac{32}{9}$

Por lo tanto: $\{ a_n \} = \left\{ 2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{7}, \dfrac{32}{9}, \cdots \right\}$

2) $a_n = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$

el primer término es: $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

el segundo término es: $\dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

el tercer término es: $\dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

el cuarto término es: $\dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

el quinto término es: $\dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6}$

Por lo tanto: $\{ a_n \} = \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \cdots \right\}$

Obtener el término general de las siguientes sucesiones:

1) $\{ a_n \} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \cdots \}$

Se aprecia que se compone por números impares, por lo que se deduce que el término general de esta sucesión es $a_n = \{2n-1\}$.

2) $\{ a_n \} = \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \cdots \right\}$

Nótese como el denominador de cada componente es igual al numerador más uno, por lo que se conluye que el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$.

3) $\{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \cdots \right\}$

Se advierte que el denominador de cada término crece de la forma 3^n, por lo que se deduce que el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$.

4) $\{ a_n \} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \cdots \right\}$

Analizando los numeradores, se deduce que están dados por el cuadrado de cada número natural menos uno. Similarmente, los denominadores están dados por el cuadrado de ese mismo número natural pero más la unidad. Por lo tanto, el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right\}$.

Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

1) $\{ a_n \} = \left\{ \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{25}{8}, \frac{49}{16}, \frac{97}{32}, \cdots \right\}$

El término general es $a_n = \left\{ 3 + \frac{1}{2^n} \right\}$, lo que implica que cada número es cada vez más parecido a 3, por lo que ese es el límite de la sucesión.

2) $\{ a_n \} = \{ -4, -8, -12, -16, -20, \cdots \}$

El término general es $a_n = \{ -4n \}$, lo que significa que la sucesión es decreciente y no acotada, así que el límite de la sucesión es $-\infty$, es decir, es divergente.

3) $a_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

Expresando sus términos: $\{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots \right\}$. Se observa como el cociente tiende a la unidad, por lo que el límite de la sucesión es 1.

4) $a_n = \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}$

Expresando sus términos: $\{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \cdots \right\}$. Se puede advertir como los números son cada vez más pequeños, por lo tanto, el límite de la sucesión es 0.

5) $\{ a_n \} = \{ 2, 5, 8, 11, 14, \cdots \}$

Como el término general es $a_n = \{ -1 + 3n \}$, la sucesión es creciente y no acotada, por lo que el límite de la sucesión es ∞, es decir, es divergente.

6) $a_n = \{ (-2)^n \}$

Expresando sus términos: $\{ a_n \} = \{ -2, 4, -8, 16, -32, 64, \cdots \}$. Se aprecia claramente como el signo de los números son alternados (sucesión oscilante), por lo tanto, la sucesión es divergente y su límite no existe.